VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

Aurelija KASPARAVIČIŪTĖ

ATSITIKTINIO SKAIČIAUS NEPRIKLAUSOMŲ DĖMENŲ SUMOS DIDŽIŲJŲ NUOKRYPIŲ TEOREMOS

DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA

FIZINIAI MOKSLAI,
MATEMATIKA (01P)

Vilnius LEIDYKLA TECHNIKA 2013

Disertacija rengta 2009–2013 metais Vilniaus Gedimino technikos universitete.
Mokslinis vadovas

prof. habil. dr. Leonas SAULIS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija ginama Vilniaus Gedimino technikos universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas

prof. habil. dr. Kęstutis KUBILIUS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Nariai:

prof. habil. dr. Romanas JANUŠKEVIČIUS (Lietuvos edukologijos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),

dr. Jolita NORKŪNIENĖ (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

prof. habil. dr. Rimantas RUDZKIS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

prof. habil. dr. Jonas Kazys SUNKLODAS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Oponentai:

prof. habil. dr. Algimantas Jonas BIKELIS (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),

doc. dr. Jonas ŠIAULYS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2014 m. sausio 14 d. 14 val. Vilniaus Gedimino technikos universiteto Senato posėdžių salėje.
Adresas: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva.
Tel.: (8 5) 274 49 52, (8 5) 274 49 56; faksas (8 5) 270 01 12;
el. paštas doktor@vgtu.lt
Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2013 m. gruodžio 13 d.
Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus Gedimino technikos universiteto (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lietuva) ir Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto (Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius, Lietuva) bibliotekose.
VGTU leidyklos „Technika" 2203-M mokslo literatūros knyga.

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY

Aurelija KASPARAVIČIŪTĖ

THEOREMS OF LARGE DEVIATIONS FOR THE SUMS OF A RANDOM NUMBER OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION

PHYSICAL SCIENCES,
MATHEMATICS (01P)

Vilnius LEIDYKLA TECHNIKA 2013

Doctoral dissertation was prepared at Vilnius Gediminas Technical University in 2009–2013.
Scientific Supervisor

Prof Dr Habil Leonas SAULIS (Vilnius Gediminas Technical University, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation is being defended at the Council of Scientific Field of Mathematics at Vilnius Gediminas Technical University:

Chairman

Prof Dr Habil Kęstutis KUBILIUS (Vilnius Gediminas Technical University, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

Members:

Prof Dr Habil Romanas JANUŠKEVIČIUS (Lithuanian University of Educational Sciences, Physical Sciences, Mathematics – 01P),

Dr Jolita NORKŪNIENĖ (Vilnius Gediminas Technical University, Physical Sciences, Mathematics – 01P),

Prof Dr Habil Rimantas RUDZKIS (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P),

Prof Dr Habil Jonas Kazys SUNKLODAS (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

Opponents:

Prof Dr Habil Algimantas Jonas BIKELIS (Vytautas Magnus University, Physical Sciences, Mathematics – 01P),

Assoc Prof Dr Jonas ŠIAULYS (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Council of Scientific Field of Mathematics in the Senate Hall of Vilnius Gediminas Technical University at 2 p. m. on 14 January 2014.
Address: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania.
Tel. +370 5 274 49 52, +370 5 274 49 56; fax +370 5 270 01 12;
e-mail: doktor@vgtu.lt
The summary of the doctoral dissertation was distributed on 13 December 2013.
A copy of the doctoral dissertation is available for review at the Libraries of Vilnius Gediminas Technical University (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lithuania) and the Vilnius University Institute of Mathematics and Informatics (Akademijos 4, LT-08663 Vilnius, Lithuania).

Įvadas

Problemos formulavimas

Didžiųjų nuokrypių teorija skirta retai pasitaikančių įvykių mažų tikimybių aproksimacijos uždaviniams. Tokie uždaviniai kyla, pavyzdžiui, draudos matematikoje, kai tenka vertinti didelių žalų, kurios pasirodo retai, mažas tikimybes. Didžiųjų nuokrypių teorija buvo sukurta nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumoms ir išplėtota atsitiktinių procesų klasėms. Disertacinis darbas skirtas atsitiktinio dėmenų skaičiaus (a. d. s.) sumų, nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumavimo su teigiamais svoriniais koeficientais, skirstinio didžiųjų nuokrypių tiek Kramero, tiek ir laipsninėse Liniko zonose teoremų gavimui. Disertaciniame darbe nagrinėjama tik normalioji aproksimacija.

Darbo aktualumas

Tikimybių teorijoje a. d. s. atsitiktinių dydžių sumų skirstinio asimptotinio elgesio tyrimas ganėtinai naujas uždavinys. Pirmieji rezultatai gauti XX a. penktąjame dešimtmetyje. Pastaruoju metu, minėtų sumų tikimybių uodegų aproksimacijai egzistuoja įspūdingas kiekis rezultatų. Vis dėlto, didžiųjų nuokrypių teorija ir toliau sparčiai plėtojama, dėl didelio kiekio skirtingų ir sudėtingų uždavinių, kurie kyla įvairiose matematikos srityse, kuriose būtinas didžiųjų nuokrypių tikimybių tyrimas.

Tyrimų objektas

Disertacinio darbo tyrimo objektas yra atsitiktinio dėmenų skaičiaus nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių su teigiamais svoriniais koeficientais sumos. Visur disertacijoje daroma prielaida, kad neneigiamas sveikareikšmis atsitiktinis sumavimo indeksas yra nepriklausomas nuo sumuojamų atsitiktinių dydžių.

Darbo tikslas ir uždaviniai

Disertacijos tikslas yra standartizuotos a. d. s. sumos, nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumavimo su teigiamais svoriniais koeficientais, skirstinio aproksimacija standartiniu normaliuoju dėsniu didžiųjų nuokrypių tiek Kramero, tiek ir laipsninėse Liniko zonose. Rezultatai gaunami dviem atvejais: kai nagrinėjamų atsitiktinių dydžių vidurkiai lygūs nuliui ir kai nelygūs nuliui. Disertaciniame darbe sprendžiami tokie uždaviniai:

1. Įvertinti standartizuotos a. d. s. sumos kumuliantus iš viršaus tuo atveju, kai nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai tenkina apibendrintą S. N. Bernšteino sąlygą. Taip pat reikalaujama, kad a. d. s. teigiamų svorinių koeficientų sumų kumuliantai tenkintų aprėžtumo sąlygas.

2. Gauti standartizuotos a. d. s. sumos pasiskirstymo funkcijos tikslias didžiųjų nuokrypių santykiams lygybes ir ištirti šių santykių asimptotinį elgesį (konvergavimą į vienetą).
3. Gauti minėtos sumos didžiųjų nuokrypių tikimybės eksponentines nelygybes.
4. Išanalizuoti didžiųjų nuokrypių teoremų atskirus atvejus, kai atsitiktinis dėmenų skaičius pasiskirstęs pagal žinomą dėsnį (yra binominis atsitiktinis dydis, ir homogeninis arba mišrus Puasono procesas); kai visi svoriniai koeficientai tapatingai lygūs vienetui; didžiųjų nuokrypių diskontavimo versija.
5. Gauti standartizuoto sudėtinio Puasono proceso tankio funkcijos asimptotinį skleidinį didžiųjų nuokrypių Kramero zonoje.

Tyrimų metodai

Iš didžiųjų nuokrypių tyrimo metodų, disertaciniame darbe pasirinktas kumuliantų metodas, kuris pasiūlytas S. V. Statulevičiaus (1966) ir išplėtotas R. Rudzkio, L. Saulio ir S. V. Statulevičiaus (1978). Standartizuoto sudėtinio Puasono proceso tankio funkcijos asimptotinio skleidinio didžiųjų nuokrypių Kramero zonoje gavimui, kartu su kumuliantų metodu naudojamas klasikinis charakteristinių funkcijų metodas. Standartizuotos a. d. s. sumos kumuliantų įvertinimui iš viršaus naudojamas kombinatorinis metodas.

Mokslinis darbo naujumas

A. d. s. sumų tikimybių uodegų aproksimavimui skirtas didelis kiekis mokslinės literatūros. Tačiau greta mokslinių darbų, išskyrus disertacijos autorės kartu su L. Sauliu paskelbtas publikacijas, nėra tų, kuriuose būtų nagrinėjamos a. d. s. sumos, nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumavimo su teigiamais svoriniais koeficientais, skirstinio normalioji aproksimacija didžiųjų nuokrypių tiek Kramero, tiek ir laipsninėse Liniko zonose, naudojant kumuliantų metodą.

Standartizuotų a. d. s. sumų pasiskirstymo funkcijų didžiųjų nuokrypių tiek Kramero, tiek laipsninėse Liniko zonose teoremų įrodymas, minėtų sumų didžiųjų nuokrypių tikimybių eksponentinių nelygybių gavimas, standartizuoto sudėtinio Puasono proceso tankio funkcijos asimptotinio skleidinio didžiųjų nuokrypių Kramero zonoje nagrinėjimas, naudojant kumuliantų, charakteritinių funkcijų ir analizinį balno taško metodus yra ganėtinai sudėtingi uždaviniai, kurie sprendžiami pirmą kartą. Taip pat reikėtų pabrėžti, kad disertaciniame darbe sumuojami nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su svoriniais koeficientais, tai yra tiriamas tarpinis variantas tarp vienodai pasiskirsčiusių ir nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių. Be to, nagrinėjamos a. d. s. sumos kumuliantų įverčiams iš viršaus gauti, naudojamas kombinatorinis metodas.

Praktinė darbo rezultatų reikšmė

A. d. s. sumos kaip modelis sutinkamos daugelyje taikomųjų problemų, pavyzdžiui, draudimo, ekonomikos teorijoje, finansų matematikoje, eilių, tinklų teorijoje. Be to, tikimybių teorijoje didžiųjų nuokrypių problematika yra viena iš aktyviausių mokslinių tyrimo sričių taikomų, pavyzdžiui, matematinėje statistikoje, eilių sistemose, komunikacijos tinkluose, informacijos teorijoje, rizikos jautrumo kontrolėje, dalinėms diferencialinėms lygtims, statistinėje mechanikoje, fizikoje.

Klausimai, susiję su ekstremaliais įvykiais, vaidina vis svarbesnį vaidmenį ir finansų, ir draudos matematikoje. Finansuose, didžiųjų nuokrypių problematika kyla įvairiuose kontekstuose. Pavyzdžiui, rizikos valdyme didieji nuokrypiai naudojami vertinant didelių nuostolių tikimybes, atsirandančias dėl rinkos kintamųjų pasikeitimo, ar vertinant įsipareigojimų neįvykdymo, kai sandorio šalis nesugeba atsiskaityti sutartyje nustatyta tvarka, tikimybes.

Ginamieji teiginiai

1. Standartizuotos a. d. s. sumos kumuliantų įverčiai iš viršaus.
2. Minėtos sumos pasiskirstymo funkcijos didžiųjų nuokrypių tiek Kramerio, tiek ir laipsninėse Liniko zonose teoremos.
3. Standartizuotos a. d. s. sumos didžiųjų nuokrypių tikimybių eksponentinės nelygybės.
4. Standartizuoto sudėtinio Puasono proceso tankio funkcijos asimptotinis skleidinys didžiųjų nuokrypių Kramero zonoje.

Darbo rezultatų aprobavimas

Disertacijos rezultatai paskelbti 4 straipsniuose recenzuojamuose periodiniuose mokslo leidiniuose. Tarpiniai rezultatai pristatyti 10 mokslinių konferencijų ir 4 seminaruose, iš kurių 2 konferencijos ir 1 seminaras yra tarptautiniai.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, trys pagrindiniai skyriai, bendrosios išvados, literatūros sąrašas, autoriaus publikacijų disertacijos tema sąrašas. Disertacijos apimtis yra 118 puslapių, 352 formulės, 182 literatūros šaltiniai.

1. Didžiųjų nuokrypių tyrimų apžvalga

Šiame disertacijos skyriuje aprašomi gauti moksliniai rezultatai didžiųjų nuokrypių problematikos tema, kuri užima vieną iš pagrindinių vietų tikimybių teorijoje. Pirmasis šio skyriaus poskyris skirtas neatsitiktinio dėmenų skaičiaus atsitiktinių dydžių sumų mažų tikimybių aproksimacijos uždaviniams. Čia pagrindinis dėmesys skiriamas S. V. Statulevičiaus, L. Saulio, R. Rudzkio ir R. Bentkaus darbams. Antrasis poskyris pradedamas a. d. s., atsitiktinių dydžių sumų skirstinio asimptotinio elgesio tyrimų apžvalga ir baigiamas šių sumų pasiskirstymo funkcijų didžiųjų nuokrypių teoremomis, kurios atitinka disertaciniame darbe nagrinėjamą problematiką.

Nagrinėkime nepriklausomų atsitiktinių dydžių, turinčių tą patį skirstinį su dispersija ir matematiniu vidurkiu, šeimą $\{X, X_j, j = 1, 2, ...\}$. Žymėsime,

$$\mu = \mathbf{E}X, \qquad 0 < \sigma^2 = \mathbf{D}X < \infty, \qquad F_X(x) = \mathbf{P}(X < x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Bet kokio atsitiktinio dydžio X, turinčio charakteristinę funkciją $f_X(u) = \mathbf{E}exp\{iuX\}$, $u \in \mathbb{R}$, k-tos eilės momentus ir kumuliantus apibrėšime

$$\mathbf{E}X^k = \frac{1}{i^k}\frac{d^k}{du^k} f_X(u)\Big|_{u=0}, \; \Gamma_k(X) = \frac{1}{i^k}\frac{d^k}{du^k}\ln f_X(u)\Big|_{u=0}, \; k = 1, 2, ... \,. \quad (2)$$

k-tos eilės kumuliantai egzistuos, jei egzistuos k-tos eilės momentai.

Nagrinėkime neatsitiktinio dėmenų skaičiaus sumą $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Pagal centrinę ribinę teoremą standartizuotos sumos

$$\tilde{S}_n = (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sqrt{\mathbf{D}S_n} = (S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n}),$$

su $\mathbf{E}\tilde{S}_n = 0$ ir $\mathbf{D}\tilde{S}_n = 1$, ribinis skirstinys yra standartinis normalusis: $F_{\tilde{S}_n}(x) \to \Phi(x)$, kai $n \to \infty$, tolygiai atžvilgiu x. Čia $F_{\tilde{S}_n}(x) = \mathbf{P}(\tilde{S}_n < x) = \mathbf{P}(S_n - n\mu < \sqrt{n}\sigma x)$, o $\Phi(x)$ yra standartinė normalioji pasiskirstymo funkcija.

Įprastinį Berio-Eseno įvertį $\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{\tilde{S}_n}(x) - \Phi(x)| = O(n^{-1/2})$ prasminga taikyti, kai stebėjimų skaičius n pakankamai didelis. Jei vertinamos tikimybės yra mažos, jų artumą geriau parodo didžiųjų nuokrypių tikimybių santykiai. Tikimybės $1 - F_{\tilde{S}_n}(x) = \mathbf{P}(S_n - n\mu \geqslant \sigma\sqrt{n}x)$, $F_{\tilde{S}_n}(-x) = \mathbf{P}(S_n - n\mu < -\sigma\sqrt{n}x)$, kai $x \to \infty$, yra vadinamos atsitiktinių dydžių sumų didžiųjų nuokrypių tikimybėmis. Nagrinėkime didžiųjų nuokrypių santykius

$$U_n(x) = \frac{1 - F_{\tilde{S}_n}(x)}{1 - \Phi(x)}, \qquad V_n(x) = \frac{F_{\tilde{S}_n}(-x)}{\Phi(-x)}, \qquad x \in [0, \; \tau_n], \qquad (3)$$

čia τ_n tokia nemažėjanti funkcija, kad $\tau_n \to \infty$, $n \to \infty$. Iš centrinės ribinės teoremos išplaukia, kad

$$U_n \to 1, \qquad V_n \to 1, \quad \text{tolygiai pagal } x = [0, \tau_n], \qquad (4)$$

čia $\tau_n = O(1)$, $n \to \infty$.

H. Krameris (1938) pastebėjo, kad didžiųjų nuokrypių uždaviniuose reikalingos tam tikros sąlygos atsitiktinių dydžių momentams. Paprastai nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai, tenkinantys šias sąlygas:

- *Kramero sąlyga*: egzistuoja toks $h > 0$, kad $\mathbf{E}\exp\{h|X|\} < \infty$, tai yra atsitiktinio dydžio X charakteristinė funkcija $f_X(u)$ yra analizinė taško $u = 0$ aplinkoje.
- *Liniko sąlyga*: egzistuoja tokie dydžiai $h > 0$ ir $0 < \gamma < 1$, kad $\mathbf{E}\exp\{h|X|^\gamma\} < \infty$. Iš šios sąlygos seka, kad atsitiktinio dydžio X momentų augimas neužtikrina charakteristinės funkcijos analiziškumo nulinio taško aplinkoje.

Ribinių teoremų didžiųjų nuokrypių problematikoje svarbią vietą užima H. Kramero (1938) darbas, kuriame gautos sumos S_n didžiųjų nuokrypių santykių (3) tikslios lygybės, kai sumos dėmenys tenkina Kramero sąlygą. (3) didžiųjų nuokrypių santykių asimptotinė analizė daug sudėtingesnė, jei neatsitiktinio dėmenų skaičiaus sumos S_n dėmenys netenkina minėtos sąlygos. Yu. V. Linikas savo darbuose įvedė susilpnintą Kramero sąlygos variantą. Sumos S_n didžiųjų nuokrypių santykių artėjimas į vienetą, kai vienodai pasiskirstę sumos dėmenys tenkina Liniko sąlygą, pilnai išnagrinėtas Yu. V. Liniko, V. M. Zolotarevo, S. V. Nagajevo. Daugelyje darbų didžiųjų nuokrypių teoremos buvo įrodytos analiziniu balno taško metodu ir dažniausiai neatsitiktinio dėmenų skaičiaus, nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumoms. Tai paprasčiausias atvejis, leidžiantis suprasti didžiųjų nuokrypių tikimybių problematiką. Šie rezultatai pateikti I. A. Ibragimovo ir Yu. V. Liniko (1965) monografijoje ir S. V. Nagajevo (1979) apžvalginiame straipsnyje.

Naujas žingsnis didžiųjų nuokrypių teorijoje buvo žengtas, kai įvairių statistikų didžiųjų nuokrypių teoremoms nagrinėti S. V. Statulevičius (1966) pasiūlė kumuliantų metodą reikalaudamas, kad bet koks atsitiktinis dydis X, su nuliniu vidurkiu $\mu = 0$ ir vienetine dispersija $\sigma^2 = 1$, tenkintų S. V. Statulevičiaus sąlygą: egzistuoja tokie dydžiai $\gamma \geqslant 0$ ir $\Delta > 0$, kad

$$|\Gamma_k(X)| \leqslant (k!)^{1+\gamma}/\Delta^{k-2}, \qquad k = 3, 4, \ldots . \tag{S_γ}$$

S. V. Statulevičius įrodė didžiųjų nuokrypių lemą, kai bet koks atsitiktinis dydis X, su $\mu = 0$ ir $\sigma^2 = 1$, tenkina (S_γ) sąlygą, su $\gamma = 0$ (didžiųjų nuokrypių Kramero zona). 1972 m. šią lemą supaprastino R. Rudzkis. 1978 m. R. Rudzkis, L. Saulis, V. Statulevičius įrodė bendrąją didžiųjų nuokrypių lemą, kai nagrinėjamas atsitiktinis dydis X, su $\mu = 0$ ir $\sigma^2 = 1$, tenkina kumuliantų reguliaraus mažėjimo sąlygą (S_γ). Remdamiesi bendrąja didžiųjų nuokrypių lema, minėti mokslininkai gavo didžiųjų nuokrypių teoremas tiek Kramero ($\gamma = 0$), tiek ir laipsninėse Liniko ($\gamma > 0$) zonose, nepriklausomų nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumoms. Neretai vietoje tikslių didžiųjų nuokrypių lygybių, pasitenkinama mažiau tiksliomis eksponentinėmis nelygybėmis. 1980 m. R. Bentkus ir R. Rudzkis atsitiktinio dydžio X, su $\mu = 0$ ir

$\sigma^2 = 1$, tenkinančio S. V. Statulevičiaus sąlygą, tikimybei $\mathbf{P}(X \geqslant x)$ gavo eksponentines nelygybes. Bendrosios didžiųjų nuokrypių ir eksponentinių nelygybių lemų pagalba gaunamos didžiųjų nuokrypių teoremos ir eksponentinės nelygybės įvairioms statistikoms. Šiems klausimams skirta L. Saulio ir S. V. Statulevičiaus (1991) monografija.

Bet kokio atsitiktinio dydžio, su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija, tenkinančio (S_γ) sąlygą, su $\gamma = 0$, tankio funkcijos asimptotinis skleidinys didžiųjų nuokrypių zonose gautas L. Saulio (1980). Remiantis šia tankio funkcijos didžiųjų nuokrypių bendrąja lema ir naudojant gerai žinomus S. V. Statulevičiaus (1965) charakteristinių funkcijų įverčius, 1991 m. L. Saulis įrodė nepriklausomų nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumos tankio funkcijos didžiųjų nuokrypių teoremą Kramero zonoje. Taip pat gavo šio asimptotinio skleidinio liekamojo nario įvertį. Trečiame disertacinio darbo skyriuje gautas standartizuoto sudėtinio Puasono proceso tankio funkcijos asimptotinis skleidinys didžiųjų nuokrypių Kramero zonoje ir įvertintas šio skleidinio liekamasis narys.

Kumuliantų reguliaraus mažėjimo (S_γ) sąlyga, leido gauti a. d. s. nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių standartizuotos sumos

$$\tilde{S}_N = \frac{S_N - \mathbf{E}S_N}{\sqrt{\mathbf{D}S_N}}, \qquad S_N = \sum_{j=1}^{N} X_j, \quad S_0 = 0, \tag{5}$$

didžiųjų nuokrypių teoremas Kramero zonoje. Čia N yra neneigiamas sveikareikšmis atsitiktinis dydis, kurio skirstinys priklauso nuo tam tikro parametro. Laikome, kad N yra nepriklausomas nuo nagrinėjamų nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $\{X, X_j, j = 1, 2, ...\}$.

Žymėsime,

$$\alpha = \mathbf{E}N, \qquad \beta^2 = \mathbf{D}N, \qquad \mathbf{P}(N = s) = q_s, \quad s \in \mathbb{N}_0. \tag{6}$$

Galima parodyti, kad S_N vidurkis ir dispersija yra

$$\mathbf{E}S_N = \mu\alpha, \qquad \mathbf{D}S_N = \sigma^2\alpha + \mu^2\beta^2 > 0.$$

Pastebėkime, kad tiriant atsitiktinių sumų (5) skirstinio didžiųjų nuokrypių santykių asimptotinį elgesį, reikalingos papildomos sąlygos ne tik a. d. s. sumų dėmenų momentams, bet ir atsitiktiniam dydžiui N. 1967 m. S. V. Statulevičius nagrinėjo pasiskirstymo funkcijos $F_{S_N}(\mu\alpha + x\sigma\sqrt{\alpha})$ didžiųjų nuokrypių teoremą Kramero zonoje, kai $\alpha = \mathbf{E}N \to \infty$. Buvo reikalaujama, kad atsitiktinis dydis X su $\mu \neq 0$ ir atsitiktinis dėmenų skaičius N tenkintų sąlygas: egzistuoja tokie teigiami dydžiai H_1, H_2, K_1, K_2, kad

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(X-\mu)^k| &\leqslant k!H_1K_1^{k-2}\sigma^2, && k=3,4,..., \\ |\varGamma_k(N)| &\leqslant k!H_2K_2^{k-1}\alpha^{1+(k-1)\epsilon}, && k=1,2,... . \end{aligned} \tag{7}$$

Minėtos didžiųjų nuokrypių teoremos įrodyme laikoma, kad nemažinant bendrumo $\mu=0$. Tačiau skirtingai nuo neatsitiktinio dėmenų skaičiaus sumų S_n, a. d. s. sumoms S_N šis reikalavimas nėra tenkinamas. 2007 m. L. Saulis ir D. Deltuvienė patikslino pasiskirstymo funkcijos $F_{\tilde{S}_N}(x)$ didžiųjų nuokrypių teoremas Kramero zonoje, kai atsitiktiniai dydžiai X, su $\mu\neq 0$, ir N tenkina, atitinkamai, $(\bar{B}_0)$ ir (8) sąlygas: egzistuoja tokie $K>0$, $K_1>0$ ir $\epsilon\geqslant 0$, kad

$$|\mathbf{E}X^k| \leqslant k!K^{k-2}\mathbf{E}X^2, \qquad k=3,4,..., \tag{$\bar{B}_0$}$$

$$|\varGamma_k(N)| \leqslant (1/2)k!K_1^{k-2}(\beta^2)^{1+(k-2)\epsilon}, \qquad k=2,3,... . \tag{8}$$

Minėti mokslininkai, taip pat gavo tikimybės $\mathbf{P}(\pm\tilde{S}_N \geqslant x)$ eksponentines nelygybes. 1978 m. L. Saulis įrodė a. d. s. sumos ir jos maksimumo, kai $\mu=0$, skirstinio didžiųjų nuokrypių teoremas Kramero zonoje. A. d. s. nepriklausomų atsitiktinių vektorių sumos pasiskirstymo funkcijos didžiųjų nuokrypių teoremos Kramero zonoje išnagrinėtos L. Saulio (1980).

Atskiru atveju S. V. Statulevičiaus, L. Saulio ir D. Deltuvienės gauti rezultatai apibendrinti disertacijos autorės A. Kasparavičiūtės ir L. Saulio darbuose. Taip pat šiuose darbuose ištirtas atvejis, kai a. d. s. sumos (9) atskiro dėmens charakteristinė funkcija nėra analizinė nulinio taško aplinkoje. A. Kasparavičiūtės ir L. Saulio gauti rezultatai, detaliai aptarti disertacijos antrame ir trečiame skyriuose.

2. Atsitiktinių sumų didžiųjų nuokrypių teoremos

Nagrinėkime nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių šeimą $\{X, X_j, j=1,2,...\}$, turinčią tą patį skirstinį su baigtine dispersija ir matematiniu vidurkiu, kurie apibrėžti (1) lygybėmis. Tarkime, kad atsitiktinis dydis X tenkina apibendrintą S. N. Bernšteino sąlyga

$$|\mathbf{E}(X-\mu)^k| \leqslant (k!)^{1+\gamma}K^{k-2}\sigma^2, \qquad k=3,4,... . \tag{$\bar{B}_\gamma$}$$

Nagrinėkime standartizuotą a. d. s. sumą

$$\tilde{Z}_N = \frac{Z_N-\mathbf{E}Z_N}{\sqrt{\mathbf{D}Z_N}}, \qquad Z_N=\sum_{j=1}^{N} a_jX_j, \qquad Z_0=0, \tag{9}$$

čia $0 < a_j < \infty$, o N yra neneigiamas sveikareikšmis atsitiktinis dydis, nepriklausantis nuo $\{X, X_j,\ j = 1,\, 2,\, ...\}$ ir kurio skirstinys priklauso nuo tam tikro parametro. Pavyzdžiui, jei N yra homogeninis Puasono procesas, tai šiuo atveju tariama, kad $N := N_t$ skirstinys priklauso nuo parametro $t \geqslant 0$. N vidurkis, dispersija ir tikimybė yra apibrėžti (6) lygybėmis. Tokios sumos (9) kaip modelis taikomos, pavyzdžiui, draudos matematikoje, kai Z_N žymi suminį draudiminių ieškinių, pateiktų tam tikru laikotarpiu, procesą. Tada N yra draudiminių ieškinių skaičius tam tikru laiko momentu, X_j – j-toji draudiminė paraiška, o a_j – diskonto faktorius.

Pažymėkime,

$$T_{N,r} = \sum_{j=1}^{N} a_j^r, \qquad T_{s,r} = \sum_{j=1}^{s} a_j^r, \quad s, r \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

čia $T_{N,r}$ yra atsitiktinis dydis. Laikoma, kad $T_{0,r} = 0$, kiekvienam fiksuotam r. Neabejotinai $T_{N,0} = N$. Galima parodyti, kad

$$\begin{aligned} \mathbf{E}T_{N,r} &= \sum_{s=1}^{\infty} q_s T_{s,r}, \qquad \mathbf{D}T_{N,r} = \mathbf{E}T_{N,r}^2 - (\mathbf{E}T_{N,r})^2, \\ \mathbf{E}T_{N,r}^2 &= \sum_{s=0}^{\infty} q_s \mathbf{E}(T_{N,r}^2 | N = s) = \sum_{s=1}^{\infty} q_s T_{s,r}^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Tada atsižvelgiant į (11), atsitiktinės sumos Z_N vidurkis ir dispersija yra

$$\mathbf{E}Z_N = \mu \mathbf{E}T_{N,1}, \qquad \mathbf{D}Z_N = \sigma^2 \mathbf{E}T_{N,2} + \mu^2 \mathbf{D}T_{N,1} > 0. \tag{12}$$

Disertacinio darbo antrame skyriuje įrodytos $F_{\tilde{Z}_N}(x)$ pasiskirstymo funckijos didžiųjų nuokrypių tikslių lygybių ir konvergavimo į vienetą 2.1, 2.2 teoremos tiek Kramero, tiek laipsninėse Liniko zonose ir tikimybės $\mathbf{P}(\pm \tilde{Z}_N \geqslant x)$ eksponentinių nelygybių 2.3 teorema, taikant kumuliantų metodą. Taip pat gautas konvergavimo greičio į standartinį normalųjį dėsnį įvertis (2.4 teorema).

Norint įrodyti sumos $\tilde{Z}_N$ pasiskirstymo funkcijos didžiųjų nuokrypių teoremas, pirmiausia reikia gauti minėtos sumos kumuliantų įverčius iš viršaus. Tam reikalaujama, kad atsitiktinis dydis X tenkintų $(\bar{B}_\gamma)$ sąlygą ir keliamos papildomos (L) ir (L_0) sąlygos atsitiktinių dydžių $T_{N,1}$, $T_{N,2}$ k-tos eilės kumuliantams: egzistuoja tokie $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ ir $\epsilon \geqslant 0$, kad

$$|\varGamma_k(T_{N,1})| \leqslant (1/2) k! K_1^{k-2} (\mathbf{D}T_{N,1})^{1+(k-2)\epsilon}, \qquad k = 2, 3, ..., \tag{L}$$

$$|\varGamma_k(T_{N,2})| \leqslant k! K_2^{k-1} (\mathbf{E}T_{N,2})^{1+(k-1)\epsilon}, \qquad k = 1, 2, ... \, . \tag{L_0}$$

Sąlyga (L), taikoma tuo aveju, kai $\mu \neq 0$, o (L_0), kai $\mu = 0$. Atkreipkime dėmesį, kad atskiru atveju šios sąlygos keliamos atsitiktiniui dydžiui N (žr. (8) ir (7) sąlygas).

Čia ir vėliau skliausteliuose nurodomas lemos, teoremos ar teiginio numeris, pagal kurį pilnus jų įrodymus galima rasti disertaciniame darbe. Pažymėkime $(b \vee c) = \max\{b,\, c\}$, $b,\ c \in \mathbb{R}$, $0 < a = \sup\{a_j,\, j = 1,\, 2,\, ...\} < \infty$ ir $0 < \bar{a} = \inf\{a_j,\, j = 1,\, 2,\, ...\} < \infty$.

1 lema. (2.2) *Tarkime, kad atsitiktinis dydis X su dispersija $0 < \sigma^2 < \infty$ tenkina $(\bar{B}_\gamma)$ sąlygą, o atsitiktiniai dydžiai $T_{N,1}$ ir $T_{N,2}$, apibrėžti* (10) *lygybe, tenkina (L) ir (L_0) sąlygas, tai*

$$|\Gamma_k(\tilde{Z}_N)| \leqslant \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\Delta_*^{k-2}}, \qquad k = 3,\, 4,\, ..., \tag{13}$$

$$\Delta_* = \begin{cases} \Delta_N, \textit{jei } \mu \neq 0, \\ \Delta_{N,0}, \textit{jei } \mu = 0, \end{cases} \tag{14}$$

čia

$$\Delta_N = \sqrt{\mathbf{D}Z_N}/L_N,\ L_N = 2\Big(\frac{a}{\bar{a}}\Big)^2\Big(\frac{a}{\bar{a}}K_1|\mu|(\mathbf{D}T_{N,1})^\epsilon \vee \Big(1 \vee \frac{\bar{a}\sigma}{2a|\mu|}\Big)aM\Big),$$

$$\Delta_{N,0} = \sqrt{\mathbf{D}Z_N}/L_{N,0}, \qquad L_{N,0} = 2\big(1 \vee K_2(\mathbf{E}T_{N,2})^\epsilon\big)\big((1/2) \vee a\big)M.$$

$\mathbf{D}Z_N$ yra apibrėžta (12) *lygybe, o $M = 2\max\{\sigma,\, K\}$, $K > 0$. K_1, K_2, ϵ yra apibrėžti pagal (L) ir (L_0), o $\mathbf{D}T_{N,1}, \mathbf{E}T_{N,2}$, apibrėžti* (11) *lygybėmis.*

Kadangi $\Gamma_1(\tilde{Z}_N) = 0$ ir $\Gamma_2(\tilde{Z}_N) = 1$, tai pagal V. P. Leonov (1964) sumos $\tilde{Z}_N$ skirstinio konvergavimui į standartinį normalųjį dėsnį pakanka, kad kiekvienam $k = 3,\, 4,\, ...,\ \Gamma_k(\tilde{Z}_N) \to 0$, jei $\Delta_* \to \infty$.

Iš (13) nelygybės seka, kad (9) tenkina kumuliantų reguliaraus mažėjimo sąlygą (S_γ) su $\Delta := \Delta_*$. Tokiu būdu, remiantis bendrosiomis didžiųjų nuokrypių ir eksponentinių nelygybių lemomis, gaunamos pasiskirstymo funkcijos $F_{\tilde{Z}_N}(x)$ didžiųjų nuokrypių tiek Kramero, tiek laipsninėse Liniko zonose ir eksponentinių nelygybių teoremos.

Pažymėkime,

$$\Delta_{*,\gamma} = c_\gamma {\Delta_*}^{1/(1+2\gamma)}, \qquad c_\gamma = (1/6)(\sqrt{2}/6)^{1/(1+2\gamma)}. \tag{15}$$

Laikysime, kad θ (su indeksu ar be jo), moduliu neviršija vieneto.

1 teorema. (2.1) *Tarkime, kad X su dispersija $0 < \sigma^2 < \infty$ tenkina $(\bar{B}_\gamma)$ sąlygą,* *o $T_{N,1}$ ir $T_{N,2}$ tenkina, atitinkamai, (L) ir (L_0) sąlygas, tai intervale $0 \leqslant x < \varDelta_{*,\gamma}$, galioja lygybės*

$$\frac{1-F_{\tilde{Z}_N}(x)}{1-\Phi(x)} = \exp\{L_{*,\gamma}(x)\}\Big(1+\theta_1 f(x)\frac{x+1}{\varDelta_{*,\gamma}}\Big),$$
$$\frac{F_{\tilde{Z}_N}(-x)}{\Phi(-x)} = \exp\{L_{*,\gamma}(-x)\}\Big(1+\theta_2 f(x)\frac{x+1}{\varDelta_{*,\gamma}}\Big),$$

čia

$$f(x) = \frac{60\big(1+10\varDelta^2_{*,\gamma}\exp\{-(1-x/\varDelta_{*,\gamma})\sqrt{\varDelta_{*,\gamma}}\}\big)}{1-x/\varDelta_{*,\gamma}},$$

$$L_{*,\gamma}(x) = \sum_{3\leqslant k<r}\tilde{\lambda}_{*,k}x^k + \theta_3(x/\varDelta_{*,\gamma})^3, \quad r = \begin{cases} 2+(1/\gamma), & \gamma>0, \\ \infty, & \gamma=0. \end{cases} \tag{16}$$

Koeficientai $\tilde{\lambda}_{*,k}$ yra išreiškiami per $\tilde{Z}_N$ kumuliantus ir sutampa su Kramero-Petrovo eilutės koeficientais: $\tilde{\lambda}_{*,k} = -b_{*,k-1}/k$, čia $b_{*,k}$ randami nuosekliai sprendžiant lygtis

$$\sum_{r=1}^{j}\frac{1}{r!}\varGamma_{r+1}(\tilde{Z}_N)\sum_{j_1+\ldots+j_r=j,\ j_i\geqslant 1}\ \prod_{i=1}^{r} b_{*,j_i} = \begin{cases} 1, & j=1, \\ 0, & j=2,3,\ldots\,. \end{cases}$$

2 teorema. (2.2) *Jei 1 teoremos sąlygos yra tenkinamos, tai su visais $x \geqslant 0$,*

$$x = \begin{cases} o((\mathbf{D}T_{N,1})^{((1/2)-\epsilon)\nu(\gamma)}), \text{ kai } \mu \neq 0, \\ o((\mathbf{E}T_{N,2})^{((1/2)-\epsilon)\nu(\gamma)}), \text{ kai } \mu = 0, \end{cases}$$

galioja

$$\frac{1-F_{\tilde{Z}_N}(x)}{1-\Phi(x)} \to 1, \qquad \frac{F_{\tilde{Z}_N}(-x)}{\Phi(-x)} \to 1, \tag{17}$$

jei $\mathbf{D}T_{N,1} \to \infty$ arba $\mathbf{E}T_{N,2} \to \infty$ (priklausomai nuo nagrinėjamo atvejo: $\mu \neq 0$ arba $\mu = 0$), kai $0 \leqslant \epsilon < 1/2$. Čia $\nu(\gamma) = (1+2(1\vee\gamma))^{-1}$.

3 teorema. (2.3) *Tegul X su $0 < \sigma^2 < \infty$, ir $T_{N,1}$, $T_{N,2}$ tenkina, atitinkamai, $(\bar{B}_\gamma)$, (L) ir (L_0) sąlygas, tai visiems $x \geqslant 0$,*

$$\mathbf{P}(\pm\tilde{Z}_N \geqslant x) \leqslant \exp\Big\{-\frac{x^2}{2(2^{1+\gamma}+(x/\Delta_*^{1/(1+2\gamma)}))^{(1+2\gamma)/(1+\gamma)}}\Big\}.$$

Disertaciniame darbe nagrinėjami ir atskiri čia pateiktų didžiųjų nuokrypių atvejai: kai neneigiamas sveikareikšmis atsitiktinis dydis N yra binominis atsitiktinis dydis, homogeninis arba mišrus Puasono procesas; kai $a_j \equiv 1$, $j = 1, 2, ...$; kai $a_j \equiv v^j$, $0 < v < 1$.

Atsižvelgdami į trečią skyrių, čia nagrinėkime atvejį, kai $a_j \equiv 1$, $j = 1, 2, ...$, ir $N := N_t$, $t \geqslant 0$, yra homogeninis Puasono procesas su laiko skalės funkcija $\Lambda(t) = \lambda t$, $t \geqslant 0$, $\lambda > 0$, vidurkiu $\alpha_t = \mathbf{E}N_t = \lambda t$, dispersija $\beta_t^2 = \mathbf{D}N_t = \lambda t$ ir tikimybe $\mathbf{P}(N_t = s) = q_s = e^{-\lambda t}(\lambda t)^s/s!$, $s \in \mathbb{N}_0$. Jei $N := N_t$ yra homogeninis Puasono procesas nepriklausantis nuo $\{X, X_j,\ j = 1, 2, ...\}$, tai

$$\tilde{S}_{N_t} = \frac{S_{N_t} - \mathbf{E}S_{N_t}}{\sqrt{\mathbf{D}S_{N_t}}}, \qquad S_{N_t} = \sum_{j=1}^{N_t} X_j, \quad S_0 = 0, \tag{18}$$

yra standartizuotas sudėtinis Puasono procesas. Čia atsižvelgiant į (12) (kai $a_j \equiv 1$): $\mathbf{E}S_{N_t} = \mu\lambda t$, $\mathbf{D}S_{N_t} = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2) > 0$.

Atkreipkime dėmesį, kad N_t, $t \geqslant 0$, charakteristinė funkcija yra $f_{N_t}(u) = \exp\{-\lambda t(1 - \exp\{iu\})\}$, $u \in \mathbb{R}$. Todėl naudodami k-tos eilės kumuliantų apibrėžimą (2), gauname $\Gamma_k(N_t) = \lambda t$, $k = 1, 2, ...$. Be to, nesunku pastebėti, jei $a_j \equiv 1$ ir $N := N_t$ yra homogeninis Puasono procesas, tai $T_{N,r} = N_t$, $r \in \mathbb{N}_0$ ir $\mathbf{E}T_{N,r} = \mathbf{D}T_{N,r} = \lambda t$. Čia $T_{N,r}$ ir $\mathbf{E}T_{N,r}$, $\mathbf{D}T_{N,r}$ apibrėžti, atitinkamai, (10) ir (11) lygybėmis. Taigi (L) ir (L_0) sąlygos tenkinamos su $\epsilon = 0$, $K_1 = K_2 = 1$ ir $\mathbf{E}T_{N,2} = \mathbf{D}T_{N,1} = \lambda t$.

Atsižvelgiant į padarytas pastabas, $\tilde{S}_{N_t}$ k-tos eilės kumuliantai tenkina (13) įvertį iš viršaus, kur (14) Δ_* apibrėžime:

$$\Delta_{N_t} = \sqrt{\lambda t(\sigma^2 + \mu^2)}/L_1, \quad L_1 = 2\big(|\mu| \vee \big(1 \vee \sigma/(2|\mu|)\big)M\big), \textit{ kai } \mu \neq 0,$$
$$\Delta_{N_t,0} = \sigma\sqrt{\lambda t}/L_2, \qquad L_2 = 2M, \textit{ kai } \mu = 0,$$

čia $M = 2(K \vee \sigma)$, $K > 0$.

(18) proceso k-tos eilės kumuliantus galime įvertinti ir tiksliau.

1 Teiginys. (2.4.) *Jei X su $0 < \sigma^2 < \infty$ tenkina sąlygą $(\bar{B}_\gamma)$, o N_t, $t \geqslant 0$, yra homogeninis Puasono procesas, tai*

$$|\Gamma_k(\tilde{S}_{N_t})| \leqslant (k!)^{1+\gamma}/\Delta_t^{k-2}, \quad \Delta_t = \sqrt{\lambda t(\sigma^2 + \mu^2)}/K, \quad k = 3, 4, ... \tag{19}$$

Čia $\Delta_t \to \infty$, jei $t \to \infty$ ir iš (19) seka, kad (18) tenkina kumuliantų reguliaraus mažėjimo sąlygą (S_γ) su $\Delta := \Delta_t$. Todėl atsižvelgiant į 2 teoremą, galima teigti, kad abiem atvejais: $\mu \neq 0$ ir $\mu = 0$, didžiųjų nuokrypių santykių artėjimas į vienetą (17) bus tenkinamas su $Z_N := S_{N_t}$, jei $t \to \infty$.

3. Sudėtinio Puasono proceso lokalinė ribinė teorema

Nagrinėkime nepriklausomus vienodai pasiskirsčiusius atsitiktinius dydžius $\{X, X_j, j = 1, 2, ...\}$, su vidurkiu $\mathbf{E}X = \mu$, dispersija $0 < \mathbf{D}X = \sigma^2 < \infty$ ir pasiskirstymo funkcija $F_X(x) = \mathbf{P}(X < x)$, $x \in \mathbb{R}$, kurie tenkina apibendrintą S. N. Bernšteino sąlygą $(\bar{B}_\gamma)$ su $\gamma = 0$. Tarkime, kad egzistuoja atsitiktinio dydžio X tokia tankio funkcija, kad

$$\sup_x p_X(x) \leqslant A < \infty, \qquad A > 0. \tag{D'}$$

Tarkime, kad $X(h)$, $h > 0$, yra bet kokio atsitiktinio dydžio X sujungtinis atsitiktinis dydis su tankio funkcija

$$p_{X(h)}(x) = \frac{\exp\{hx\}p_X(x)}{\varphi_X(h)}, \qquad f_{X(h)}(u) = \frac{\varphi_X(h+iu)}{\varphi_X(h)}, \tag{20}$$

čia $\varphi_X(h)$ yra generuojanti X funkcija. Tada sudėtinio Puasono proceso, apibrėžto (18) lygybe, sujungtiniu bus vadinamas procesas

$$S_{N_t(h)}(h) = \sum_{j=1}^{N_t(h)} X_j(h),$$

kurio tankio funkcija yra apibrėžiama pagal (20) su $X(h) := S_{N_t(h)}(h)$ ir $X := S_{N_t}$. Čia $N_t(h)$ yra nepriklausomas nuo $X_j(h)$, $t \geqslant 0$, be to

$$q_s(h) = \mathbf{P}(N_t(h) = s) = \exp\{-\lambda t\varphi_X(h)\}(\lambda t\varphi_X(h))^s/s!.$$

$S_{N_t(h)}(h)$ vidurkis ir dispersija yra

$$\mathbf{E}S_{N_t(h)}(h) = \lambda t\varphi_X(h)\mu(h), \quad \mathbf{D}S_{N_t(h)}(h) = \lambda t\varphi_X(h)\mathbf{E}X^2(h),$$

čia

$$\mu(h) = \mathbf{E}X(h) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathit{\Gamma}_k(X)h^{k-1}}{(k-1)!}, \ \mathbf{E}X^2(h) = \frac{1}{\varphi_X(h)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mathbf{E}X^k h^{k-2}}{(k-2)!},$$

$$\sigma^2(h) = \mathbf{D}X(h) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mathit{\Gamma}_k(X)h^{k-2}}{(k-2)!}.$$

Pastebėkime, kad sudėtinio Puasono proceso atveju, $h = h(x) > 0$

apibrėžiamas kaip

$$x = (\mathbf{E}S_{N_{t(h)}}(h) - \mathbf{E}S_{N_t})/\sqrt{\mathbf{D}S_{N_t}} \tag{21}$$

lygties sprendinys. Pažymėkime,

$$\begin{aligned} R_t(h) &= \int_{|u|\geqslant U_t} |f_{\tilde{S}_{N_{t(h)}}(h)}(u)|du, \\ U_t &= \frac{1}{12}\Big(1 - \frac{Kx}{\sqrt{\lambda t(\sigma^2+\mu^2)}}\Big)\frac{\sqrt{\lambda t(\sigma^2+\mu^2)}}{K}, \end{aligned} \tag{22}$$

intervale $0 \leqslant x < \sqrt{\lambda t(\sigma^2+\mu^2)}/(24K),\ K > 0$. Čia standartizuotos sumos

$$\tilde{S}_{N_{t(h)}}(h) = (S_{N_{t(h)}}(h) - \mathbf{E}S_{N_{t(h)}}(h))/(\mathbf{D}S_{N_{t(h)}}(h))^{1/2}$$

charakteristinė funkcija $f_{\tilde{S}_{N_{t(h)}}(h)}(u)$ apibrėžta lygybe

$$\begin{aligned} f_{\tilde{S}_{N_{t(h)}}(h)}(u) &= \exp\{-i\mathbf{E}S_{N_{t(h)}}(h)u/(\mathbf{D}S_{N_{t(h)}}(h))^{1/2}\} \\ &\quad \cdot \exp\big\{-\lambda t\varphi_X(h)\big(1 - f_{X(h)}(u/(\mathbf{D}S_{N_{t(h)}}(h))^{1/2})\big)\big\}. \end{aligned}$$

Toliau tarkime, kad $\phi(x)$ yra standartinė normalioji tankio funkcija. Pažymėkime, $q(m) = (3\sqrt{2e}/2)^m + 8(m+2)^2 4^{3(r+1)}\Gamma((3m+1)/2)$, $m \geqslant 1$.

Naudojant (18) proceso k-tos eilės kumuliantų įverčius iš viršaus (19) su ($\gamma = 0$) ir taikant bendrąją tankio funkcijos asimptotinio skleidinio didžiųjų nuokrypių Kramero zonoje lemą (Saulis, 1980), gautas 4 teoremoje pateiktas asimptotinis skleidinys (23). Čia (22) liekamasis narys įvertintas, naudojant gerai žinomus S. V. Statulevičiaus (1965) charakteristinių funkcijų įverčius.

4 teorema. (3.1.) *Jei X su $0 < \sigma^2 < \infty$ tenkina $(\bar{B}_0)$ ir (D') sąlygas, o N_t, $t \geqslant 0$, yra homogeninis Puasono procesas, tai visiem $m \geqslant 3$, intervale $0 \leqslant x < \sqrt{\lambda t(\sigma^2+\mu^2)}/(24K)$, $K > 0$, galioja asimptotinis skleidinys*

$$\begin{aligned} \frac{p_{\tilde{S}_{N_t}}(x)}{\phi(x)} &= \exp\{L_t(x)\}\Big(1 + \sum_{k=0}^{m-3} M_{t,k}(x) \\ &\quad + \theta_1 q(m)\big(K(x+1)/\sqrt{\lambda t(\sigma^2+\mu^2)}\big)^{m-2} + \theta_2 R_t(h)\Big). \end{aligned} \tag{23}$$

(22) *liekamąjam nariui galioja įvertis*

$$R_t(h) \leqslant \exp\{-c_1(h)U_t^2\}/(c_1(h)U_t) + c_2(h)\exp\{-\lambda t c_3(h)\}, \quad \textit{kai } \lambda t > 2,$$

čia $h = h(x) > 0$ yra (21) lygties sprendinys. Be to, konstantoms $c_1(h)$, $c_2(h)$ ir $c_3(h)$ galioja įverčiai

$$\begin{aligned} c_1(h) &\geqslant \sigma^2/(1.6\pi^2 \mathbf{E}X^2), \quad c_2(h) \leqslant 334e^4\sqrt{2\pi}\sqrt{\mathbf{E}X^2}MA/\sigma, \\ c_3(h) &\geqslant c/(MA)^2, \qquad 0 < c < 2\cdot 10^{-8}, \quad M = 2\{\sigma \vee K\},\ A > 0. \end{aligned}$$

Daugianariai $L_t(x)$ yra apibrėžti pagal (16) su $\gamma = 0$ ir $Z_N := S_{N_t}$, o $M_{t,k}(x)$ randami iš sąryšių

$$\begin{aligned} M_{t,k}(x) &= \sum_{l=0}^{k} K_{t,l}(x) Q_{t,k-l}(x), \\ K_{t,k}(x) &= {\sum}_1^* \prod_{r=1}^{k} \frac{1}{m_r!}(-\tilde{\lambda}_{t,r+2}x^{r+2})^{m_r}, \qquad K_{t,0}(x) \equiv 1, \\ Q_{t,k}(x) &= {\sum}_1^* H_{k+2m}(x) \prod_{r=1}^{k} \frac{1}{m_r!}\Big(\frac{\Gamma_{r+2}(\tilde{S}_{N_t})}{(r+2)!}\Big)^{m_r}, \quad Q_{t,0}(x) \equiv 1, \end{aligned}$$

čia $\tilde{\lambda}_{t,r+2}$, apibrėžti 1 teoremoje su $\gamma = 0$ ir $Z_N := S_{N_t}$, išreiškiami per $\tilde{S}_{N_t}$ kumuliantus ir sutampa su Kramero eilutės koeficientais. ${\sum}_1^*$ sumavimas atliekamas pagal visus neneigiamus lygties $m_1 + 2m_2 + ... + km_k = k$, $m_1 + m_2 + ... + m_k = m$ sprendinius $0 \leqslant m_1,...,m_k \leqslant k$, $1 \leqslant m \leqslant k$. $H_r(x)$ yra Čebyševo-Hermito daugianariai.

Bendrosios išvados

1. Nagrinėjant atsitiktinio dėmenų skaičiaus (a. d. s.) sumos, nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumavimo su teigiamais svoriniais koeficientais, pasiskirstymo funkcijos didžiųjų nuokrypių teoremų atskirus atvejus pastebėta, kad disertaciniame darbe gautos didžiųjų nuokrypių teoremos tiek Kramero, tiek laipsninėse Liniko zonose ir eksponentinės nelygybės yra neatsitiktinio dėmenų skaičiaus sumų pasiskirstymo funkcijų didžiųjų nuokrypių teoremų ir eksponentinių nelygybių išplėtojimas.
2. Disertaciniame darbe gautos a. d. s. sumos didžiųjų nuokrypių teoremos Kramero zonoje ir eksponentinės nelygybės yra apibendrinimas S. V. Statulevičiaus (1967), L. Saulio (1978), L. Saulio ir D. Deltuvienės (2007) darbų. Būtina pastebėti, kad skirtingai nuo minėtų darbų, disertacijoje išnagrinėtas atvejis, kai a. d. s. sumos atskiro dėmens charakteristinė funkcija nėra analizinė nulinio taško aplinkoje.

3. Disertacinio darbo rezultatai leido gauti sudėtinio Puasono ir sudėtinio mišraus Puasono procesų, kurie plačiai naudojami finansų ir draudimo matematiniuose modeliuose, didžiųjų nuokrypių teoremas.
4. Gautas standartizuoto sudėtinio Puasono proceso tankio funkcijos asimptotinis skleidinys didžiųjų nuokrypių Kramero zonoje praplečia neatsitiktinio dėmenų skaičiaus sumų tankio funkcijų asimptotinius skleidinius Kramero zonoje.

Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas

Recenzuojamuose mokslo žurnaluose

Kasparavičiūtė, A.; Saulis, L. 2013. Large deviations for weighted random sums, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 18(2): 129–142. ISSN 1392-5113. (Thomson ISI Web of Science).

Kasparavičiūtė, A.; Saulis, L. 2011a. Theorems on large deviations for randomly indexed sum of weighted random variables, *Acta Applicandae Mathematicae* 116(3): 255–267. ISSN 0167-8019, DOI 10.1007/s10440-011-9641-7. (Thomson ISI Web of Knowledge).

Kasparavičiūtė, A.; Saulis, L. 2011b. The discounted version of large deviations for a randomly indexed sum of random variables, *Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai* 52: 369–374. ISSN 0132-2818.

Kasparavičiūtė, A.; Saulis, L. 2010. Theorems on large deviations for the sum of random number of summands, *Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai* 51: 459–464. ISSN 0132-2818.

Apie autorių

Aurelija Kasparavičiūtė gimė 1984 m. vasario 15 d. Alytuje.

2006 m. suteiktas matematikos bakalauro kvalifikacinis laipsnis, o 2008 m. suteiktas taikomosios matematikos magistro laipsnis Vytauto Didžiojo universiteto Informatikos fakulteto Matematikos ir statistikos katedroje. 2009–2013 m. – Vilniaus Gedimino technikos universiteto Matematinės statistikos katedros doktorantė.

Šiuo metu dirba lektore Vilniaus Gedimino technikos universiteto Matematinės statistikos katedroje.

THEOREMS OF LARGE DEVIATIONS FOR THE SUMS OF A RANDOM NUMBER OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

Formulation of the problem

The theory of large deviations deals with the probabilities of rare events that are exponentially small as a function of some parameter. For example, in insurance mathematics, such problems arise in the approximation for small probabilities of large claims that occur rarely. The theory was originally created for sums of independent identically distributed (i. i. d.) random variables and then extended to a class of random processes. This thesis is concerned with theorems of large deviations in both the Cramér and the power Linnik zones for a distribution of the sums of a random number of summands (r. n. s.) of i. i. d. weighted random variables. Only the case of normal approximation is considered in the thesis.

Topicality of the work

The asymptotic behavior of the probabilities for the sums of a r. n. s. of random variables is a quite recent problem in probability theory. The first results were developed in the twentieth century, in the 1940s. Presently, there are many strong results on the approximation of tail probabilities for the aforementioned sums. Nevertheless, the theory of large deviations is still under rapid development, because of a large number of diverse and extremely complicated problems arising in various areas of mathematics that require it’s investigation.

Research object

The research object of this thesis is the sum of a r. n. s. of i. i. d. random variables with positive weights. Throughout the thesis, it is assumed that the non-negative integer-valued index of the sum is independent of the considered random variables.

The aim and tasks of the work

The aim of this dissertation is a normal approximation to a distribution of the standardized sum of a r. n. s. of i. i. d. weighted random variables that takes into consideration large deviations in both the Cramér and the power Linnik zones. The results are obtained for two cases: where the mean of considered random variables is zero, and where it is non-zero. In the thesis, the following problems are examined:

1. To evaluate the upper estimate for cumulants of the standardized sum of a r. n. s. in the case where the i. i. d. random variables satisfy S. N. Bernstein’s condition and under some additional assumptions for the cumulants of a sum of a r. n. s. of positive weights.

2. To obtain exact large deviation ratios and to analyze the asymptotic behavior (convergence to a unit) of that ratios for a distribution function of the standardized sum of a r. n. s.
3. To derive exponential inequalities for the probability of large deviations for aforementioned sum.
4. To consider instances of large deviations where the law of the random number of summands is known (is a binomial random variable, and is homogeneous, or mixed Poisson process); where all weights are equal to a unit, and the discounted version of large deviations.
5. To obtain asymptotic expansion that take into consideration large deviations in the Cramér zone for the density function of the standardized compound Poisson process.

Applied methods

Among the existing methods for large deviations analysis, we rely on the cumulant method that was proposed by S. V. Satulevičius (1966) and developed by R. Rudzkis, L. Saulis, and V. Statulevičius (1978). To obtain asymptotic expansion that take into consideration large deviations in the Cramér zone for the density function of the standardized compound Poisson process along with the cumulant method, the classical method of characteristic functions is used. The combinatorial method is used to evaluate the upper estimate for the cumulants of the standardized sum of a r. n. s.

Scientific novelty

There is a very extensive literature on approximation of tail probabilities for the sums of a r. n. s. However, among scientific works there are no works – excepting publications by the author of the dissertation together with L. Saulis – for normal approximation that take into consideration large deviations in both the Cramér and the power Linnik zones for the sum of a r. n. s. of i. i. d. weighted random variables in case where the cumulant method is used.

To prove large deviation theorems in both the Cramér and the power Linnik zones for the distribution function of the standardized sum of a r. n. s., to derive exponential inequalities for large deviation probabilities of mentioned sums, to obtain asymptotic expansion that take into consideration large deviations in the Cramér zone for the density function of the standardized compound Poisson process, when cumulant, characteristic functions and saddle-point methods are used, are rather complicated problems that were solved for the first time. It should be emphasized that in the thesis, i. i. d. weighted random variables are considered, which constitute an intermediate variant between identical and non-identical distributed random variables. In addition, in order to obtain upper bounds for the cumulants of the sum of a r. n. s., combinatorial method is used.

Practical value of the work results

The sums of a r. n. s. appear as models in many applied problems, for instance, in insurance, economic theory, finance mathematics, queuing, network theory. In addition, the theory of large deviations is one of the most active research fields in probability theory, with many applications to areas such as statistical inference, queuing systems, communication networks, information theory, risk-sensitive control, partial differential equations, statistical mechanics, physics.

Questions related to extremal events play an increasingly important role in both financial and insurance applications. In finance, large deviations arise in various contexts. For example, they occur in risk management for computing the probability of large losses in a portfolio subject to market risk as well as the default probabilities for a portfolio under credit risk.

Statements presented for defence

1. A suitable bound for the cumulants of the standardized sum of a r. n. s.
2. Theorems of large deviations in both the Cramér and the power Linnik zones for a distribution function of aforementioned sum.
3. Exponential inequalities for the probability of large deviations for the standardized sum of a r. n. s.
4. Asymptotic expansion that take into consideration large deviations in the Cramér zone for the density function of the standardized compound Poisson process.

Approval of the work results

Four papers on the topic of the dissertation have been published in refereed scientific journals. Intermediate research results were reported at 10 scientific conferences and approved in 4 seminars, of which 2 conferences and 1 seminar are international.

The scope of the scientific work

The thesis consists of an introduction, three chapters, general conclusions, references, and a list of the author's publications. The introduction reveals the importance of the scientific problem, describes the tasks of the thesis, research methodology, scientific novelty, the practical significance of results. In the first chapter an overview of the problems posed in the dissertation is presented. The second chapter is devoted for obtaining an upper bound for the cumulants, theorems of large deviations and exponential inequalities for the standardized random sum of a r. n. s. of i. i. d. weighted random variables. In the third chapter, the asymptotic expansion that take into consideration large deviations in the Cramér zone for the density function of the standardized compound Poisson process is considered.

The total scope of the dissertation is 118 pages, 352 mathematical expressions, 182 items of reference.

General conclusions

1. Having explored instances of large deviations for a distribution of the standardized sum of a r. n. s. of i. i. d. weighted random variables, it was noted that in the thesis obtained theorems of large deviations in both the Cramér and the power Linnik zones and exponential inequalities can be regarded as extension of the theorems of large deviations and exponential inequalities for the sums of non-random number of summands.
2. In the thesis, obtained theorems of large deviations in the Cramér zone and exponential inequalities for the standardized sum of a r. n. s. can be regarded as generalization of the works by S. V. Statulevičius (1967), L. Saulis (1978), L. Saulis and D. Deltuvienė (2007). It should be remarked, as distinct from the aforementioned works, in the thesis, the instance where characteristic function of the separate summand of the sum of a r. n. s. is not analytic in a vicinity of zero is also considered.
3. The results of the thesis lead us to large deviation theorems for the compound and mixed Poisson processes that are largely used in insurance and finance mathematic.
4. The result on asymptotic expansion that take into consideration large deviations in the Cramér zone for the density function of the standardized compound Poisson process extends asymptotic expansions for the density function of the sums of non-random number of summands.

About the author

Aurelija Kasparavičiūtė was born in Alytus, on the 15th of February 1984.

The bachelor degree in Mathematics, Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Informatics, Vytautas Magnus University, 2006. Master of Sciences in Applied Mathematics, Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Informatics, Vytautas Magnus University, 2008. In 2009–2013 – PhD student of Vilnius Gediminas Technical University.

At present – lecturer of Vilnius Gediminas Technical University.

Aurelija KASPARAVIČIŪTĖ

ATSITIKTINIO SKAIČIAUS
NEPRIKLAUSOMŲ DĖMENŲ SUMOS
DIDŽIŲJŲ NUOKRYPIŲ TEOREMOS

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, Matematika (01P)

Aurelija KASPARAVIČIŪTĖ

THEOREMS OF LARGE DEVIATIONS
FOR THE SUMS OF A RANDOM NUMBER
OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

Summary of Doctoral Dissertation
Physical Sciences, Mathematics (01P)

2013 12 13. 1,5 sp. l. Tiražas 70 egz.
Vilniaus Gedimino technikos universiteto
leidykla „Technika",
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius,
http://leidykla.vgtu.lt
Spausdino UAB „Baltijos kopija"
Kareivių g. 13B, LT-09109 Vilnius.