VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

Dmitrij MELICHOV

APIE STOCHASTINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SPRENDINIŲ HURSTO INDEKSO VERTINIMĄ

DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA
FIZINIAI MOKSLAI,
MATEMATIKA (01P)

Vilnius LEIDYKLA TECHNIKA 2011

Disertacija rengta 2007–2011 metais Vilniaus Gedimino technikos universitete.
Mokslinis vadovas

prof. habil. dr. Kęstutis KUBILIUS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija ginama Vilniaus Gedimino technikos universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas

prof. habil. dr. Jonas Kazys SUNKLODAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Nariai:

prof. habil. dr. Algimantas Jonas BIKELIS (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),

prof. habil. dr. Romanas JANUŠKEVIČIUS (Vilniaus pedagoginis universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),

prof. habil. dr. Antanas LAURINČIKAS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),

doc. dr. Jonas ŠIAULYS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Oponentai:

prof. habil. dr. Juozas AUGUTIS (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),

doc. dr. Mečislavas MEILŪNAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2011 m. gruodžio 9 d. 9 val. Vilniaus Gedimino technikos universiteto senato posėdžių salėje.

Adresas: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva.
Tel.: (8 5) 274 49 52, (8 5) 274 49 56; faksas (8 5) 270 01 12;
el. paštas doktor@vgtu.lt

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2011 m. lapkričio 8 d.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus Gedimino technikos universiteto (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lietuva) ir Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto (Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius, Lietuva) bibliotekose.

VGTU leidyklos „Technika" 1918-M mokslo literatūros knyga.

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY

Dmitrij MELICHOV

ON ESTIMATION OF THE HURST INDEX OF SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION
PHYSICAL SCIENCES,
MATHEMATICS (01P)

VGTU
LEIDYKLA
Vilnius TECHNIKA 2011

Doctoral dissertation was prepared at Vilnius Gediminas Technical University in 2007–2011.
Scientific Supervisor

Prof Dr Habil Kęstutis KUBILIUS (Vilnius Gediminas Technical University, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation is being defended at the Council of Scientific Field of Mathematics at Vilnius Gediminas Technical University:

Chairman

Prof Dr Habil Jonas Kazys SUNKLODAS (Vilnius Gediminas Technical University, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

Members:

Prof Dr Habil Algimantas Jonas BIKELIS (Vytautas Magnus University, Physical Sciences, Mathematics – 01P),

Prof Dr Habil Romanas JANUŠKEVIČIUS (Vilnius Pedagogical University, Physical Sciences, Mathematics – 01P),

Prof Dr Habil Antanas LAURINČIKAS (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P),

Assoc Prof Dr Jonas ŠIAULYS (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

Opponents:

Prof Dr Habil Juozas AUGUTIS (Vytautas Magnus University, Physical Sciences, Mathematics – 01P),

Assoc Prof Dr Mečislavas MEILŪNAS (Vilnius Gediminas Technical University, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Council of Scientific Field of Mathematics in the Senate Hall of Vilnius Gediminas Technical University at 9 a. m. on 9 December 2011.
Address: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania.
Tel. +370 5 274 49 52, +370 5 274 49 56; fax +370 5 270 01 12;
e-mail: doktor@vgtu.lt
The summary of the doctoral dissertation was distributed on 8 November 2011.
A copy of the doctoral dissertation is available for review at the Libraries of Vilnius Gediminas Technical University (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lithuania) and the Vilnius University Institute of Mathematics and Informatics (Akademijos 4, LT-08663 Vilnius, Lithuania).

Įvadas

Problemos formulavimas

Įvairiose mokslo srityse, tokiose kaip ekonomika ir finansai, matematika, fizika, chemija, aplinkosauga bei informatika, dažnai pasitaiko duomenų, kurie tolimi vieni nuo kitų atstumo ar laiko prasme bet turi statistiškai reikšmingą tarpusavio koreliaciją. Šis reiškinys yra žinomas kaip *ilgoji atmintis* arba *tolimoji priklausomybė* ir buvo pirmiausia nagrinėtas hidrologo Hursto 1951 m. darbe, kuris bandė sukurti tinkamą modelį Nilo upės srautui modeliuoti. Stochastinių procesų, pasižyminčių tolimos priklausomybės savybe, teorinio nagrinėjimo pamatą sudarė Mandelbroto ir van Nesso 1968 m. darbas, kuriame aprašytas trumpeninis Brauno judesys (tBj). Vėlesniuose savo darbuose B. B. Mandelbrotas tęsė procesų, turinčių ilgą atmintį, nagrinėjimą ir apibendrino savo rezultatus 1995 m. išleistoje knygoje. Pirmasis teorinis rezultatas, kuriame tBj pasirodė kaip atsitiktinių dydžių sumos riba Skorohodo topologijoje, buvo gautas Taqqu (1975). Nuo 1990 metų aktyviai nagrinėjamos tBj ir kitų procesų, pasižyminčių tolima priklausomybe, praktinio taikymo galimybės tokiose srityse kaip telekomunikacijos, finansai ir meteorologija, o tai, savo ruožtu skatina tolimesnį teorinį tBj bei kitų procesų, sudarytų jo pagrindu, nagrinėjimą.

Hursto indeksas $H \in (0,1)$ yra vienintelis tBj parametras, kuris lemia jo koreliacinę struktūrą: jei $H = 1/2$, procesas yra standartinis Brauno judesys, jei $H < 1/2$, tai proceso pokyčiai yra neigiamai koreliuoti, o jei $H > 1/2$, tai proceso pokyčiai yra teigiamai koreliuoti, kas būtent ir atitinka tolimos priklausomybės atvejį. Ši tBj savybė, kuri dažnai aptinkama realiuose duomenyse, paskatino stochastinių modelių, kuriuose standartinis Brauno judesys yra keičiamas tBj, tyrimus. Todėl svarbu ištirti šią priklausomybę ir mokėti patikrinti, ar ji iš tikrųjų egzistuoja. Šiame darbe nagrinėjamas tam tikrų tBj apibendrinimų Hursto indekso vertinimo iš diskrečiųjų duomenų uždavinys.

Darbo aktualumas

Pastaruoju metu Hursto indekso vertinimas ir modeliavimas sulaukė nemažai tyrėjų dėmesio. Buvo pasiūlyta visa aibė metodų ir įvertinių, dauguma jų yra ištirta skirtingiems Gauso procesams. Tačiau nedaug žinoma apie įvertinių konstravimą, kai nagrinėjamas procesas yra stochastinės diferencialinės lygties, valdomos trupmeninio Brauno judesio, sprendinys (kuris nebūtinai yra Gauso). Berzinos ir León 2008 m. darbe pasiūlyti Hursto indekso ir difuzijos funkcijos įvertiniai keletui atskirų šių lygčių atvejams, kai pointegrinės funkcijos yra konstantos arba tiesės. Tad norėta gauti įvertinius, galiojančius bendro pavidalo stochastinės diferencialinės lygties sprendiniui.

Tyrimų objektas

Tyrimų objektas yra stochastinės diferencialinės lygties, valdomos trupmeninio Brauno judesio su Hursto indeksu $H > 1/2$, sprendinys.

Darbo tikslas ir uždaviniai

Darbo tikslas yra išnagrinėti tam tikrų stebimų proceso reikšmių statistikų ribinę elgseną ir pritaikyti gautus rezultatus pagrįstų Hursto indekso H įvertinių konstravimui bei išnagrinėti šių įvertinių savybes. Darbo uždaviniai yra:

1. Išnagrinėti stochastinių diferencialinių lygčių, valdomu trupmeninio Brauno judesio, sprendinių kvadratinių variacijų ribinę elgseną, kai proceso reikšmės stebimos reguliariais ir nereguliariais laiko momentais.

2. Sukonstruoti stipriai pagrįstus Hursto indekso H įvertinius.

3. Išnagrinėti pokyčių santykio (*increment ratios*) statistikos taikymo stochastinių diferencialinių lygčių, valdomų trupmeninio Brauno judesio, sprendinių Hursto indekso vertinimui galimybes.

4. Palyginti gautų įvertinių skaitines charakteristikas su kitų žinomų Hursto indekso įvertinių skaitinėmis charakteristikomis.

Tyrimų metodai

Teorinėje šio darbo dalyje buvo taikomi p-variacijos skaičiavimo metodai kartu su žinomomis nelygybėmis atsitiktiniams dydžiams. Trupmeninio Brauno judesio trajektorijų modeliavimui buvo taikomas ciklinės matricos metodas (žr., pvz., Coeurjolly 2000 m. straipsnį). Visi skaičiavimai atlikti `R` programinėje aplinkoje.

Mokslinis darbo naujumas

Darbe parodyta, kad Hursto indekso H įvertiniai, pasiūlyti Istaso ir Lango 1997 m. ir Benassi ir kt. 1998 m. trupmeniniam Brauno judesiui, išlieka stipriai pagrįsti, kai vertiname stochastinės diferencialinės lygties, valdomos trupmeninio Brauno judesio, Hursto indeksą. Taip pat įrodyta, kad pokyčių santykio statistikos įvertinys, gautas Bardeto ir Surgailio 2010 m., gali būti taikomas trupmeninio geometrinio Brauno judesio Hursto indeksui vertinti.

Praktinė darbo rezultatų reikšmė

Kvadratinių variacijų įvertiniai, nagrinėjami šiame darbe, gali būti taikomi plačiai stochastinių procesų, valdomų trupmeninio Brauno judesio, klasės sprendinių Hursto indeksui vertinti. Šių įvertinių elgsena buvo išnagrinėta kompiuterinio modeliavimo būdu trupmeniniam Ornšteino-Ulenbeko procesui ir geometriniam Brauno judesiui; įvertiniai yra paprastai ir greitai skaičiuojami (apie $0{,}4s$ esant 100 trajektorijų, kurių taškų skaičiai – $N = 2^{14} + 1$), jie nekelia jokių specifinių reikalavimų proceso trajektorijų ilgiui.

Ginamieji teiginiai

1. $\widehat{H}_{dv1}$ ir $\widehat{H}_{dv2}$ yra stipriai pagrįsti stochastinės diferencialinės lygties, valdomos trupmeninio Brauno judesio, sprendinių Hursto indekso H įvertiniai.

2. Pokyčių santykio statistika gali būti taikoma trupmeninio geometrinio Brauno judesio Hursto indeksui H vertinti.

3. Gautas modifikuoto Gladyševo įvertinio konvergavimo greitis.

4. Kompiuterinio modeliavimo rezultatai leidžia teigti, kad gautų įvertinių skaitinės charakteristikos, priklausomai nuo tikros Hursto indekso reikšmės ir trajektorijų ilgio, yra geresnės ar ne blogesnės už kitų nagrinėtų įvertinių skaitines charakteristikas.

Darbo rezultatų aprobavimas

Disertacijos rezultatai paskelbti 6 straipsniuose recenzuojamuose periodiniuose mokslo leidiniuose ir pristatyti 5 mokslinėse konferencijose, iš kurių 2 – tarptautinės.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, trys pagrindiniai skyriai, išvados, literatūros sąrašas, autoriaus publikacijų disertacijos tema sąrašas ir 2 priedai. Disertacijos apimtis yra 78 puslapiai, 5 lentelės, 4 paveikslai ir 34 literatūros šaltiniai.

Pirmame skyriuje pateikta pagrindinė stochastinė diferencialinė lygtis, kitų autorių darbų disertacijos tema analizė, įvesti bendri žymenys, kurie vartojami kitose disertacijos dalyse.

Antrame skyriuje pateikti teoriniai darbo rezultatai, būtent stochastinių diferencialinių lygčių, valdomų trupmeninio Brauno judesio, sprendinių kvadratinių variacijų asimptotikos bei gauti Hursto indekso H įvertiniai. Įrodyta, kad, kai nagrinėjamas procesas yra trupmeninis geometrinis Brauno judesys, pokyčių santykio statistikos įvertinys yra stipriai pagrįstas. Gautas modifikuoto Gladyševo įvertinio konvergavimo į tikrąją parametro reikšmę greitis.

Trečiame skyriuje gauti įvertiniai palyginami su kitais žinomais Hursto indekso įvertiniais. Išnagrinėta įvertinių priklausomybė tiek nuo trajektorijos ilgio, tiek nuo tikros parametro reikšmės. Palyginimas atliktas trupmeninio Ornšteino-Ulenbeko proceso (kuris yra Gauso procesas) ir trupmeninio geometrinio Brauno judesio (kuris nėra Gauso procesas) atvejais.

1. Apibrėžimai ir istorinė apžvalga

Proceso X p-variaciją intervale $[a,b]$ vadiname

$$v_p\left(X;[a,b]\right) = \sup_{\varkappa} \sum_{k=1}^{n} \left|X(t_k) - X(t_{k-1})\right|^p ,$$

čia $\varkappa = \{t_k : k = 0, \ldots, n\}$ yra visi baigtiniai intervalo $[a,b]$ skaidiniai tokie, kad $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Nagrinėkime stochastinę diferencialinę lygtį (toliau – SDE) su Hursto indeksu $1/2 < H < 1$

$$X_t = \xi + \int_0^t f(X_s)\,ds + \int_0^t g(X_s)\,dB_s^H , \tag{1}$$

$t \in [0,T], T > 0, \xi \in \mathbb{R}$, čia $B_t^H = \{B_t^H;\, t \geqslant 0\}$ yra trupmeninis Brauno judesys su Hursto indeksu H, t. y. tolydus centruotas Gauso procesas, kurio kovariacinė funkcija yra

$$\mathbf{E}\left(B_t^H B_s^H\right) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \quad \forall t,s \geqslant 0.$$

Žinoma, kad beveik visos B_t^H trajektorijos, kai $1/2 < H < 1$, turi baigtinę p-variaciją, kai $p > 1/H$. Todėl integralai dešinėje (1) pusėje egzistuos Rymano-Stiltjeso integralo prasme. $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R})$, $\frac{1}{H} - 1 < \alpha \leqslant 1$ žymi aibę visų $\mathcal{C}^1$-funkcijų g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tokių, kad

$$\sup_x |g'(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|g'(x) - g'(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

Tegul f yra Lipšico funkcija ir $g \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R})$, $\frac{1}{H} - 1 < \alpha \leqslant 1$. Visiems $1 \leqslant p < 1 + \alpha$ egzistuos vienintelis (1) lygties sprendinys, kurio beveik visos trajektorijos priklausys tolydžiųjų baigtinės p-variacijos funkcijų klasei (žr. Lyonso 1994 m., Dudley 1999 m., Kubiliaus 2000 m. bei Nualarto ir Răşcanu 2002 m. darbus).

1961 metais Gladyševas įrodė ribinę teoremą statistikai, apibrėžtai naudojant pirmos eilės trupmeninio Brauno judesio kvadratines variacijas. Taikant šį rezultatą buvo gautas H įvertinys, kuris buvo stipriai pagrįstas, bet nebuvo asimptotiškai normalus. 1997 metais Istasas ir Langas pasiūlė kitą H įvertinį centruotiems Gauso procesams, kurie taip pat buvo apibrėžti naudojant pirmos eilės trupmeninio Brauno judesio kvadratines variacijas. Šis įvertinys asimptotiškai normalus, kai

$H \in (1/2, 3/4)$. 1998 metais Benassi ir kt. išnagrinėjo antrosios eilės Gauso procesų, turinčių trupmeninio Brauno judesio lokalines fraktalines savybes, kvadratines variacijas ir gavo Hursto indekso įvertinį, kuris buvo normalus visoms H reikšmėms. 2001 metais Coeurjolly išnagrinėjo k-osios eilės trupmeninio Brauno judesio kvadratinių variacijų asimptotines savybes ir pasiūlė asimptotiškai normaliųjų H įvertinių klasę bei rado šių įvertinių konvergavimo greičius visoms $0 < H < 1$ reikšmėms. 2006 metais Berzina ir Leónas pasiūlė Hursto indekso H ir difuzijos koeficiento g įvertinius tuo atveju, kai lygties (1) koeficientai f ir g yra tiesinės funkcijos.

Siekdami įvertinti Hursto indeksą H, iš pradžių išnagrinėjame (1) lygties sprendinio X pirmosios ir antrosios eilės kvadratinių variacijų asimptotikas. Tokie rezultatai Gauso procesams buvo gauti Bégyno 2005–2006 m. darbuose (taip pat žr. nuorodas Bégyno 2006 m. straipsnyje).

1.2. Kvadratinės variacijos

1.2.1. Reguliarieji skaidiniai

Procesui $X = \{X_t;\, t \in [0, T]\}$, įgyjančiam realias reikšmes, pirmosios ir antrosios eilės kvadratinės variacijos naudojant reguliariuosius skaidinius (t. y. skaidinius $\varkappa = \{t_k^n = kT/n;\, k = 0, \ldots, n\}$), apibrėžiamos lygybėmis

$$V_n^{(1)}(X, 2) = \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta^{(1)} X_k\right)^2, \qquad V_n^{(2)}(X, 2) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\Delta^{(2)} X_k\right)^2,$$

čia

$$\Delta^{(1)} X_k = X(t_k^n) - X(t_{k-1}^n), \quad \Delta^{(2)} X_k = X(t_{k+1}^n) - 2X(t_k^n) + X(t_{k-1}^n).$$

1.2.2. Nereguliarieji skaidiniai

Tegul $\pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{N_n}^n = T\}$, $T > 0$, yra intervalo $[0, T]$ skaidinių seka ir (N_n) – didėjančių natūraliųjų skaičių seka. Tokia skaidinių seka vadinama nereguliariąja. Apibrėžkime

$$m_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant N_n} \Delta t_k^n, \qquad p_n = \min_{1 \leqslant k \leqslant N_n} \Delta t_k^n, \qquad \Delta t_k^n = t_k^n - t_{k-1}^n.$$

Dažniausiai procesas yra stebimas reguliariais laiko momentais, tačiau galimi atvejai, kai dalis stebinių būna prarasti ar sugadinti, – taip gausime stebinius nereguliariais laiko momentais. Procesui X_t, įgyjančiam realias reikšmes, pirmosios ir antrosios eilės kvadratinės variacijos nereguliarių skaidinių $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $1/2 < H < 1$ atžvilgiu apibrėžiamos lygybėmis

$$V_{\pi_n}^{(1)}(X,2) = \sum_{k=1}^{N_n} \frac{(\Delta X_k^n)^2}{(\Delta t_k^n)^{2H-1}}\,, \qquad \Delta X_k^n = X(t_k^n) - X(t_{k-1}^n),$$

ir

$$V_{\pi_n}^{(2)}(X,2) = 2\sum_{k=1}^{N_n-1} \frac{\Delta t_{k+1}^n (\Delta_{ir}^{(2)} X_k^n)^2}{(\Delta t_k^n)^{1/2+H} (\Delta t_{k+1}^n)^{1/2+H} (\Delta t_k^n + \Delta t_{k+1}^n)}\,,$$

čia

$$\Delta_{ir}^{(2)} X_k^n = \Delta t_k^n X(t_{k+1}^n) + \Delta t_{k+1}^n X(t_{k-1}^n) - (\Delta t_k^n + \Delta t_{k+1}^n) X(t_k^n).$$

2. Kvadratinės variacijos ir pokyčių santykio statistika

2.1. Reguliarieji skaidiniai

1 teorema. Tarkime, f – tolydžioji Lipšico funkcija, o $g \in \mathcal{C}^{1+\alpha}$, $\frac{1}{H} - 1 < \alpha \leqslant 1$. Tarkime, kad intervalo $[0,T]$ skaidinys yra reguliarus. Tada

$$a) \quad \lim_{n\to\infty} n^{2H-1} V_n^{(1)}(X,2) = \int_0^T g^2(X_t)\,dt\,,$$

$$b) \quad \lim_{n\to\infty} n^{2H-1} V_n^{(2)}(X,2) = (4 - 2^{2H}) \int_0^T g^2(X_t)\,dt\,,$$

čia X yra (1) lygties sprendinys.

Apibrėžkime

$$\widehat{H}_{dv1}^n := \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln 2} \ln \frac{V_{2n}^{(1)}(X,2)}{V_n^{(1)}(X,2)}\,, \quad \widehat{H}_{dv2}^n := \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln 2} \ln \frac{V_{2n}^{(2)}(X,2)}{V_n^{(2)}(X,2)}\,.$$

Čia ir toliau $V_{2n}^{(\cdot)}(X,2)$ – visos proceso trajektorijos kvadratinė variacija, o $V_n^{(\cdot)}(X,2)$ – poaibio $\{X_k : k = 2j;\ 0 \leqslant j \leqslant [n/2]\}$ kvadratinė variacija, čia $[x]$ – skaičiaus x sveikoji dalis.

2 teorema. Tarkime, kad tenkinamos 1 teoremos sąlygos. Tada

$$\widehat{H}_{dv1}^n \longrightarrow H \quad \text{ir} \quad \widehat{H}_{dv2}^n \longrightarrow H \qquad \text{beveik visur, kai} \quad n \to \infty.$$

2.2. Nereguliarieji skaidiniai

3 teorema. Tarkime, f – tolydžioji Lipšico funkcija, o $g \in \mathcal{C}^{1+\alpha}$, $\frac{1}{H} - 1 < \alpha \leqslant 1$. Jei $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – intervalo $[0,T]$ skaidinių seka tokia, kad

$$m_n^{2-2H} \overset{\mathbf{n}\to\infty}{=} o(1/\ln n) \quad \text{ir} \quad m_n \overset{\mathbf{n}\to\infty}{=} \mathcal{O}(p_n),$$

tai

$$V_{\pi_n}^{(1)}(X,2) \xrightarrow{\mathbf{b.v.}} \int_0^T g^2(X_t)\,dt, \qquad \text{kai } m_n \to 0,$$

čia X yra (1) lygties sprendinys. Tarkime, $(i(n))$ ir $(j(n))$ – dvi natūraliųjų skaičių sekos tokios, kad $\pi_{i(n)} \subset \pi_{j(n)} \subset \pi_n$, $i(n) < j(n)$, visiems $n \in \mathbb{N}$, čia $\pi_{i(n)} = \{0 = t_0^n < t_{i(1)}^n < \cdots < t_{i(n)}^n = T\}$. Apibrėžkime

$$\widetilde{H}_{dv1}^n := \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln(m_{i(n)}/p_{j(n)})} \ln \frac{V_{j(n)}^{(1)}(X,2)}{V_{i(n)}^{(1)}(X,2)}, \qquad V_{i(n)}^{(1)}(X,2) = \sum_{k=1}^{i(n)} \left(\Delta X_k^n\right)^2,$$

čia

$$m_{i(n)} = \max_{1\leqslant k\leqslant i(n)} \Delta t_k^n, \qquad p_n = \min_{1\leqslant k\leqslant i(n)} \Delta t_k^n, \qquad \Delta t_k^n = t_k^n - t_{k-1}^n.$$

4 teorema. Tarkime, kad tenkinamos 3 teoremos sąlygos. Jei egzistuoja tokios sekos $(\pi_{i(n)})$ ir $(\pi_{j(n)})$, $i(n) \leqslant j(n)$, kad $|\ln(p_{j(n)}/p_{i(n)})| \to \infty$, kai $n \to \infty$, ir $p_{j(n)} \neq m_{i(n)}$, tai

$$\widetilde{H}_{dv1}^n \longrightarrow H \qquad \text{beveik visur,} \quad \text{kai } n \to \infty.$$

Tiriant antrosios eilės X kvadratinės variacijos konvergavimą, reikia papildomų sąlygų sekai $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Apibrėžimas. Tarkime, $(\ell_k)_{k\geqslant 1}$ – realiųjų skaičių seka intervale $(0,\infty)$. Sakysime, kad skaidinių seka $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ turi asimptotinius santykius $(\ell_k)_{k\geqslant 1}$, jei ji tenkina šias sąlygas:

- $m_n \overset{\mathbf{n}\to\infty}{=} \mathcal{O}(p_n)$;
- $\lim_{n\to\infty} \sup_{1\leqslant k\leqslant N_n} \left| \frac{\Delta t_{k-1}^n}{\Delta t_k^n} - \ell_k \right| = 0.$

Aibę $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k, \ldots\}$ vadinsime sekos $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ asimptotinių santykių aibe.

Jei seka $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reguliari, tai šios sekos asimptotiniai santykiai $\ell_k = 1$ visiems $k \geqslant 1$.

Apibrėžimas. Funkcija $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ yra invariantiška aibėje $\mathcal{L}$, jei $g(\ell) = g(\hat{\ell})$ visiems $\ell,\hat{\ell} \in \mathcal{L}$.

Pavyzdžiui, tarkime, kad $\mathcal{L} = \{\alpha, \alpha^{-1}\}$ yra aibė, sudaryta iš dviejų teigiamų realiųjų skaičių ir

$$h(\lambda) = \frac{1 + \lambda^{2H-1} - (1+\lambda)^{2H-1}}{\lambda^{H-1/2}}\,.$$

Funkcija h invariantiška aibėje $\mathcal{L}$.

5 teorema. Tarkime, f – tolydžioji Lipšico funkcija ir $g \in \mathcal{C}^{1+\alpha}$, $\frac{1}{H} - 1 < \alpha \leqslant 1$. Tegul $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – skaidinių seka su asimptotiniais santykiais $(\ell_k)_{k\geqslant 1}$ ir asimptotinių santykių aibe $\mathcal{L}$. Tarkime, kad skaidiniai yra tokie, kad

$$p_n \overset{\mathbf{n}\to\infty}{=} o(1/\ln n).$$

Tarkime, kad X yra (1) lygties sprendinys. Jei funkcija

$$h(\lambda) = \frac{1 + \lambda^{2H-1} - (1+\lambda)^{2H-1}}{\lambda^{H-1/2}}$$

invariantiška aibėje $\mathcal{L}$ arba funkcijų

$$\ell_n(t) = \sum_{k=1}^{N_n-1} \ell_k \mathbf{1}_{[t_k^n,\, t_{k+1}^n)}(t)$$

seka tolygiai konverguoja į $\ell(t)$ intervale $[0,T]$, tai

$$\lim_{n\to\infty} V_{\pi_n}^{(2)}(X,2) = 2\int_0^T g^2(X_t) h(\ell(t))\, dt.$$

2.3. Milšteino aproksimacija

Proceso X Milšteino aproksimacija taškuose t_k^n, $k = 1, \ldots, n$ apibrėžiama lygybe

$$X_k^n = X_{k-1}^n + f(X_{k-1}^n)\Delta t_k + g(X_{k-1}^n)\Delta B_k^H + \frac{1}{2}\, g(X_{k-1}^n)g'(X_{k-1}^n)\left(\Delta B_k^H\right)^2,$$

čia g' yra funkcijos g išvestinė. Kitas rezultatas tvirtina, kad, pakeitus (1) lygties sprendinį Milšteino aproksimacija, gauti Hursto indekso H įvertiniai $\widehat{H}_{dv1}^n$ ir $\widehat{H}_{dv2}^n$ išlieka stipriai pagrįsti.

6 teorema. Tegul f – tolydžioji Lipšico funkcija ir $g \in \mathcal{C}^{1+\alpha}$, $\frac{1}{H} - 1 < \alpha \leqslant 1$. Apibrėžkime

$$\widehat{H}_n^{(1),M} := \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln 2} \ln \frac{V_{N_{2n}}^{(1)}(Y^n, 2)}{V_{N_n}^{(1)}(Y^n, 2)},$$
$$\widehat{H}_n^{(2),M} := \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln 2} \ln \frac{V_{N_{2n}}^{(2)}(Y^n, 2)}{V_{N_n}^{(2)}(Y^n, 2)}.$$

Jei intervalo $[0,T]$ skaidiniai tenkina 3 teoremos sąlygas, tai $\widehat{H}_n^{(1),M} - H \xrightarrow{\mathbf{b.v.}} 0$, kai $n \to \infty$. Jei intervalo $[0,T]$ skaidiniai tenkina 5 teoremos sąlygas, tai $\widehat{H}_n^{(2),M} - H \xrightarrow{\mathbf{b.v.}} 0$ kai $n \to \infty$.

2.4. Pokyčių santykio statistika

Pokyčių santykio (*increment ratios*) statistika apibrėžiama lygybe

$$R^{p,n}(f) = \frac{1}{n-p} \sum_{k=0}^{n-p-1} \frac{|\Delta_k^{p,n} f + \Delta_{k+1}^{p,n} f|}{|\Delta_k^{p,n} f| + |\Delta_{k+1}^{p,n} f|},$$

čia $\Delta_k^{p,n} f$ yra p-osios eilės funkcijos f pokyčiai taškuose t_k^n, $k = 0, 1, \ldots, n - p$, $p \in \mathbb{N}$, t. y.

$$\Delta_k^{1,n} f = f\big(t_{k+1}^n\big) - f\big(t_k^n\big), \qquad \Delta_k^{p,n} f = \Delta_k^{1,n} \Delta_k^{p-1,n} f.$$

J. M. Bardetas ir D. Surgailis parodė, kad jei B^H yra trupmeninis Brauno judesys, kurio Hursto indeksas $H \in (0,1)$, tai

$$R^{p,n}(B^H) \xrightarrow{\mathbf{b.v.}} \Lambda_p(H), \quad \text{kai } n \to \infty, p = 1, 2, \tag{2}$$

čia

$$\Lambda_p(H) = \mathbf{E}\frac{|\Delta_0^p B^H + \Delta_1^p B^H|}{|\Delta_0^p B^H| + |\Delta_1^p B^H|}\,.$$

Pastaruoju metu klasikinis geometrinis Brauno judesys keičiamas jo trupmeniniu analogu, t. y. jo apibrėžime standartinis Brauno judesys keičiamas trupmeniniu Brauno judesiu (žr., pvz., Sottineno ir Valkeila'os 2003 m. straipsnį). Finansų matematikoje tai suteikia galimybę nagrinėti duomenis, turinčius tolimą priklausomybę. Disertacijoje įrodyta, kad (2) teiginys teisingas, kai $H \in (1/2, 7/8)$ ir $p = 1$ arba, kai $H \in (1/2, 1)$ ir $p = 2$, ir X – trupmeninis geometrinis Brauno judesys.

7 teorema. Tarkime, $B^H = \{B_t^H;\ t \in [0,1]\}$ yra trupmeninis Brauno judesys su parametru H, o X yra lygties

$$dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dB_t^H, \quad \mu, \sigma, X_0 \in \mathbb{R} \tag{3}$$

sprendinys, t.y. geometrinis Brauno judesys. Jei statistikos $R^{p,n}$ pokyčiai skaičiuojami taškuose $t_k^n = \frac{k}{2^n}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n$, tai

$$R^{p,n}(X) \xrightarrow{\mathbf{b.v.}} \Lambda_p(H), \quad \text{kai } n \to \infty, p = 1, 2\,,$$

kai $H \in (1/2, 7/8)$ ir $p = 1$ arba kai $H \in (1/2, 1)$ ir $p = 2$. Šios teoremos įrodymas pagrįstas J. M. Bardeto ir D. Surgailio įrodytos lemos apibendrinimu.

8 lema. Tarkime, kad $\psi(x_1, x_2) = \frac{|x_1+x_2|}{|x_1|+|x_2|}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, (Z_1, Z_2) – Gauso vektorius su nuliniu vidurkiu ir dispersija $\mathbf{E}Z_i^2 = 1$, $i = 1{,}2$. Tada bet kuriems atsitiktiniams dydžiams ξ_i, $i = 1, 2$, turintiems antrą momentą, teisinga nelygybė

$$\mathbf{E}\big|\psi(Z_1 + \xi_1, Z_2 + \xi_2) - \psi(Z_1, Z_2)\big| \leqslant 16 \max_{i=1,\,2} \sqrt[3]{\mathbf{E}\xi_i^2}.$$

2.5. Gladyševo įvertinio konvergavimo greitis

Kitas parametrų vertinimo aspektas, turintis didelę svarbą praktiniams taikymams, yra parametrų įvertinių konvergavimo greitis į tikrąją parametro reikšmę. Disertacijoje rastas modifikuoto Gladyševo įvertinio $\widehat{H}_n$ konvergavimo greitis.

Žinoma (žr. Gladyševo 1963 m. straipsnį), kad

$$n^{2H-1} V_n^{(1)}(B^H, 2) \xrightarrow{\mathbf{b.v.}} 1, \quad \text{kai} \quad n \to \infty.$$

Iš šio rezultato gaunama, kad

$$\widetilde{H}_n = \frac{1}{2} - \frac{\ln V_n^{(1)}(B^H, 2)}{2 \ln n}$$

yra stipriai pagrįstas Hursto indekso H įvertinys. Disertacijoje nagrinėjama šio įvertinio modifikacija. Tarkime,

$$\widehat{H}_n = \frac{1}{2} - \frac{\ln[V_n^{(1)}(B^H, 2)]}{2 \ln N_n} \mathbf{1}_{C_n}, \qquad \text{čia} \quad C_n = \{V_n^{(1)}(B^H, 2) \geqslant N_n^{-2}\}.$$

9 teorema. Tegul B^H, $1/2 < H < 1$, yra trupmeninis Brauno judesys. Tada $\widehat{H}_n$ yra stipriai pagrįstas Hursto indekso įvertinys, kurio konvergavimo greitis yra

$$\big|\widehat{H}_n - H\big| = \mathcal{O}\big(\sqrt{N_n^{-1} \ln N_n}\,\big) \quad \text{beveik visur jei} \quad \sum_{n=1}^{\infty} N_n^{-2} < \infty$$

ir

$$\mathbf{E}\big|\widehat{H}_n - H\big| = \mathcal{O}\big(\sqrt{N_n^{-1} \ln N_n}\,\big).$$

3. Įvertinių modeliavimas

Palyginimui buvo pasirinkti trupmeninis Ornšteino-Ulenbeko procesas (O-U) ir trupmeninis geometrinis Brauno judesys (gBj):

$$dX_t = -\mu X_t \, dt + \sigma \, dB_t^H, \quad X_0 = c, \tag{O-U}$$

$$dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dB_t^H, \quad X_0 = c. \tag{gBj}$$

Nagrinėjami disertacijoje Hursto indekso H įvertiniai, aprašyti 3 skyriuje, buvo palyginti su kai kuriais kitais žinomais įvertiniais. Pateiksime jų apibrėžimus.

Gladyševo ir η-sumavimo osciliacijos įvertiniai. Šie įvertiniai buvo aprašyti R. Norvaišos ir D. M. Salopek 2002 m straipsnyje. Tegul $\eta_M = \{N_m = 2^m : \ 1 \leqslant m \leqslant M\}$ ir

$$s(m) = \sum_{i=1}^{N_m} \left[X\left(\frac{i}{N_m}\right) - X\left(\frac{i-1}{N_m}\right) \right]^2.$$

Naivusis Gladyševo įvertinys apibrėžiamas lygybe

$$\widehat{H}^M_{gn} = \frac{\log\sqrt{s(M)2^{-M}}}{\log 2^{-M}}\,,$$

o mažiausiųjų kvadratų Gladyševo įvertinys –

$$\widehat{H}^M_{go} = \frac{\sum_{m=1}^M (z_m - \bar{z})^2}{\sum_{m=1}^M (z_m - \bar{z})\, m}\,,$$

čia $z_m = \log_2 \sqrt{2^m/s(m)}$, kai $m \in \{1, \ldots, M\}$ ir $\bar{z} = M^{-1}\sum_{m=1}^M z_m$.

Kiekvienam $m \in \{1, \ldots, M\}$ apibrėžkime

$$Q(m) = \sum_{i=1}^{N_m}\left[\max_{t_k^n \in \Delta_{i,\,m}}\{X(t_k^n)\} - \min_{t_k^n \in \Delta_{i,\,m}}\{X(t_k^n)\}\right],\ \text{čia}\ \Delta_{i,\,m} = \left[\frac{i-1}{N_m}, \frac{i}{N_m}\right].$$

Naivusis η-sumavimo osciliacijos įvertinys apibrėžiamas lygybe

$$\widehat{H}^M_{osn} = \frac{\log_2(N_M/Q(M))}{\log_2 N_M}\,,$$

o mažiausiųjų kvadratų η-sumavimo osciliacijos įvertinys –

$$\widehat{H}^M_{oso} = \frac{\sum_{m=1}^M (z_m - \bar{z})^2}{\sum_{m=1}^M (z_m - \bar{z})\, N_m}\,,$$

čia $z_m = \log_2 \sqrt{N_m/Q(m)}$ ir $\bar{z} = M^{-1}\sum_{m=1}^M z_m$.

Variogramos įvertinys. Proceso $X = \{X_t;\, t \in [0,1]\}$ variograma su vėlavimu ℓ apibrėžiama lygybe

$$V(\ell) = \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-\ell})^2\right].$$

Siekiant įvertinti Hursto indekso reikšmę H, reikia pasirinkti vėlavimų aibę, šiuo atveju tai buvo $\{\ell = 2^i;\, i = 0, \ldots, 5\}$. Tada $\widehat{H}^n_{var} = b/2$, čia b yra regresijos $log(V(\ell)) \sim log(\ell)$ tiesės posvyrio koeficientas.

Pokyčių santykio statistikos įvertinys. O-U ar gBj procesams $X = \{X_t;\, t \in [0,1]\}$, įgyjantiems reikšmes taškuose $t_k^n = k/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$, pokyčių santykio statistikos įvertinys gali būti apskaičiuotas taikant apytikslę lygybę

$$\widehat{H}_{ir}^n = \frac{1}{0{,}1468}\left(\frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\left|\Delta^{(2)}X_k + \Delta^{(2)}X_{k+1}\right|}{\left|\Delta^{(2)}X_k\right| + \left|\Delta^{(2)}X_{k+1}\right|} - 0{,}5174\right),$$

čia $\Delta^{(2)}X_k = X(t_{k+1}^n) - 2X(t_k^n) + X(t_{k-1}^n)$.

Trupmeninio Brauno judesio trajektorijos buvo sumodeliuotos taikant ciklinės matricos metodą (žr., pvz., Coeurjolly 2000 m. straipsnį). Ankščiau pateiktų procesų sprendinių trajektorijos buvo gautos taikant Milšteino aproksimaciją. Modeliavimo apimtis – po 100 abiejų procesų trajektorijų kiekvienai $H \in \{0{,}55, 0{,}65, \ldots, 0{,}95\}$ reikšmei. Trajektorijų konstravimui buvo panaudota $2^{14}+1$ taškų. Toks pasirinkimas pagrįstas tuo, kad mažiausiųjų kvadratų Gladyševo ir η-sumavimo osciliacijos įvertiniams reikia $2^k + 1, k \in \mathbb{N}$, taškų. Buvo išnagrinėta įvertinių elgsenos priklausomybė tiek nuo Hursto indekso reikšmės, tiek nuo trajektorijos ilgio.

Modeliavimo išvados

1. Naivieji Gladyševo ($\widehat{H}_{gn}$) ir η-sumavimo osciliacijos ($\widehat{H}_{osn}$) įvertiniai turėjo ženkliai didesnį poslinkį nei kiti nagrinėti įvertiniai, nors O-U atveju jie turėjo mažiausias dispersijas. Mažinant trajektorijų ilgius, šis poslinkis didėjo, bet nerodė priklausomybės nuo Hursto indekso reikšmės, kai H nebuvo arti 1. Pastaruoju atveju (kai $H > 0{,}9$) ženkliai padidėjo tiek šių įvertinių poslinkiai, tiek jų dispersijos. gBj atveju šių įvertinių dispersijos buvo didesnės nei pirmosios bei antrosios eilės kvadratinių variacijų (atitinkamai $\widehat{H}_{dv1}$ ir $\widehat{H}_{dv2}$) bei variogramos ($\widehat{H}_{var}$) įvertinių dispersijos.

2. $\widehat{H}_{go}$ ir $\widehat{H}_{oso}$, mažiausiųjų kvadratų Gladyševo ir η-sumavimo osciliacijos įvertiniai parodė visiškai kitą elgseną: jų poslinkiai buvo tos pačios eilės, kaip ir kitų nagrinėtų įvertinių, bet jų dispersijos buvo žymiai didesnės. Be to, šių įvertinių dispersijos lėtai mažėja, didinant trajektorijos taškų skaičių. Papildomai šie įvertiniai reikalauja, kad trajektorijos ilgis būtų $2^k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ taškų – tai reiškia, kad, turint kitą stebinių skaičių, dalį jų tektų atmesti.

3. $\widehat{H}_{dv1}$ ir $\widehat{H}_{var}$ įvertiniai elgėsi skirtingai esant „mažoms“ ir „didelėms“ Hursto indekso reikšmėms. Kai $H \in (1/2, 3/4)$, jų charakteristikos buvo geriausios tarp visų nagrinėtų įvertinių, tačiau didesnėms H reikšmėms jos buvo panašios ar prastesnės, nei $\widehat{H}_{dv2}$ bei $\widehat{H}_{ir}$ įvertinių charakteristikos.

4. $\widehat{H}_{dv2}$ įvertinio charakteristikos buvo prastesnės nei $\widehat{H}_{dv1}$ ir $\widehat{H}_{var}$, kai trajektorijų taškų skaičius buvo mažas arba Hursto indekso reikšmė buvo mažesnė už $3/4$. Kai trajektorijų taškų skaičiai buvo didesni arba H reikšmė buvo didesnė už $3/4$, šio įvertinio charakteristikos buvo geriausios. Šio įvertinio elgsena neparodė pastebimos priklausomybės nuo H reikšmės; $\widehat{H}_{ir}$ parodė tokią priklausomybę tik trajektorijoms, turinčioms pakankamai daug taškų, tačiau skaitinės jo charakteristikos buvo prastesnės. Išnagrinėjus tiesinę regresiją $log(SD) \sim log(n)$, modeliavimo rezultatai leidžia teigti, kad abiems šiems įvertiniams $SD\left(\widehat{H}_{(\cdot)}\right) \sim \mathcal{O}(n^{-1/2})$, čia SD žymi standartinį nuokrypį.

5. $\widehat{H}_{dv1}$, $\widehat{H}_{dv2}$ ir $\widehat{H}_{osn}$ įvertinių skaičiavimo trukmė buvo apie $0{,}02s$ esant 100 trajektorijų, kurių taškų skaičiai buvo $N = 2^8 + 1$ ir apie $0{,}4s$ esant 100 trajektorijų, kurių taškų skaičiai buvo $N = 2^{14} + 1$. $\widehat{H}_{gn}$ įvertinio skaičiavimo trukmė buvo apie 2 kartus trumpesnė, o $\widehat{H}_{go}$, $\widehat{H}_{oso}$ ir $\widehat{H}_{ir}$ įvertinių – apie 2–5 kartus ilgesnė.

Bendrosios išvados

Sprendžiant disertacijos uždavinius, buvo gauti šie rezultatai:

1. Įrodžius 1, 3, 6 ir 8 teoremas, nustatytos stochastinių diferencialinių lygčių, valdomų trupmeninio Brauno judesio, sprendinių pirmosios bei antrosios eilės kvadratinių variacijų asimptotikos reguliariųjų ir nereguliariųjų laiko intervalo $[0, T]$ skaidinių atvejais.

2. Reguliariųjų skaidinių atveju, 2-oje ir 4-oje teoremose įrodyta, kad trupmeninio Brauno judesio Hursto indekso H įvertiniai $\widehat{H}^n_{dv1}$ ir $\widehat{H}^n_{dv2}$, pasiūlyti Istaso ir Lango 1997 m. bei Benassi ir kitų 1998 m., išlieka stipriai pagrįsti, kai jie taikomi stochastinių diferencialinių lygčių, valdomų trupmeninio Brauno judesio, sprendiniams (kurie nebūtinai priklauso Gauso procesų klasei). Nereguliariųjų skaidinių atveju, 7-oje teoremoje įrodyta, kad pasiūlytas Hursto indekso įvertinys $\widetilde{H}^n_{dv1}$ yra stipriai pagrįstas.

3. 9-oje teoremoje įrodyta, kad gauti Hursto indekso įvertiniai išlieka stipriai pagrįsti, jei sprendinio trajektorija keičiama jos Milšteino aproksimacija.

4. 10-oje teoremoje įrodyta, kad pokyčių santykio statistikos įvertinys $\widehat{H}^n_{ir}$, pasiūlytas Bardeto ir Surgailio 2010 m., yra stipriai pagrįstas, kai jis taikomas trupmeninio geometrinio Brauno judesio Hursto indeksui vertinti.

5. 11-oje teoremoje gautas modifikuoto Gladyševo Hursto indekso įvertinio konvergavimo į tikrąją parametro reikšmę greitis.

6. Gauti įvertiniai palyginti su kai kuriais kitais žinomais Hursto indekso įvertiniais, būtent su naiviaisiais ir mažiausiųjų kvadratų Gladyševo ir η-sumavimo osciliacijos įvertiniais, variogramos ir pokyčių santykio statistikos įvertiniais. Modeliavimo rezultatai leidžia teigti, kad jei Hursto indekso reikšmė yra didesnė už $3/4$, arba kai ji vertinama turint pakankamai daug (2^{10} ir daugiau) stebinių, verta taikyti $\widehat{H}_{dv2}$ įvertinį. Jei nei viena iš šių prielaidų negalioja, $\widehat{H}_{dv1}$ ir $\widehat{H}_{var}$ įvertiniai turėtų pateikti tikslesnį įvertinimą.

Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas

Recenzuojamuose mokslo žurnaluose

Kubilius, K.; Melichov, D. 2011. On comparison of the estimators of the Hurst index of the solutions of stochastic differential equations driven by the fractional Brownian motion, *Informatica* 22(1): 97–114. ISSN 0868-4952. (Thomson ISI Web of Science).

Kubilius, K.; Melichov, D. 2010. On the convergence rates of Gladyshev's Hurst index estimator, *Nonlinear analysis: modelling and control* 15(4): 445–450. ISSN 1392-5113. (Thomson ISI Web of Science).

Kubilius, K.; Melichov, D. 2010. Quadratic variations and estimation of the Hurst index of the solution of SDE driven by a fractional Brownian motion, *Lithuanian mathematical journal* 50(4): 401–417. ISSN 0363-1672. (Thomson ISI Web of Science).

Melichov, D. 2010. Applying the IR statistic to estimate the Hurst index of the fractional geometric Brownian motion, *Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai* 51: 368–372. ISSN 0132-2818.

Kubilius, K.; Melichov, D. 2009. Estimating the Hurst index of the solution of a stochastic integral equation, *Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai* 50: 24–29. ISSN 0132-2818.

Kubilius, K.; Melichov, D. 2008. On estimation of the Hurst index of solutions of stochastic integral equations, *Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai* 48/49: 401–406. ISSN 0132-2818.

Apie autorių

Dmitrij Melichov gimė Panevėžyje, 1983 m. liepos 23 d.

2001 m. baigė nuotolinius fizikos bei matematikos kursus prie Maskvos fizikos ir technologijos instituto. 2005 m. baigė inžinerinės informatikos bakalauro studijas Vilniaus Gedimino technikos universiteto Fundamentinių mokslų fakultete. 2007 m. įgijo taikomosios statistikos magistro laipsnį Vilniaus Gedimino technikos universiteto Fundamentinių mokslų fakultete. 2007–2011 m. – doktorantūros studijos Vilniaus Gedimino technikos universiteto Matematinės statistikos katedroje. Nuo 2005 m. dirba VGTU: 2005–2007 m. laboranto pareigose, 2007–2009 – asistento pareigose, nuo 2009 m. – lektoriaus pareigose.

ON ESTIMATION OF THE HURST INDEX OF SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Formulation of the problem

In fields as diverse as economics and finance, mathematics, physics, chemistry, environmental studies and computer science it is not uncommon to encounter observations made far apart in time or space which are non-trivially correlated. This phenomenon is known as *long memory* or *long-range dependance* and was first studied by the hydrologist Hurst in 1951 who tried to derive a suitable model for the modeling of the flow of the Nile river. The stochastic calculus of stochastic processes possessing the long-range dependance property started with the work of Mandelbrot and van Ness in 1968 which introduced the fractional Brownian motion (fBm), the backbone of such processes. Later on B. B. Mandelbrot summarized his results in *Fractals and Scaling In Finance: Discontinuity, Concentration, Risk* published in 1995. The first result in which the fBm appeared as the limit of stationary sums of random variables in the Skorokhod topology was obtained by Taqqu in 1975. In the 1990s intensive studies of possibilities of applying the fBm in various teletraffic, finance and climate models started which, in turn, encouraged the stochastic analysis studies of the fBm (see, f.e., the paper of Decreusefond and Üstünel published in 1995).

The Hurst index $H \in (0, 1)$ determines the correlation structure of fBm: if $H = 1/2$ it is the standard Brownian motion, if $H < 1/2$ the increments of the process are negatively correlated and if $H > 1/2$ the increments of the process are positively correlated which implies the long-range dependance. The latter property of the fBm encouraged the studies of stochastic models in which the standard Brownian motion is replaced by the fBm, since the long-range dependance is often encountered in the observed data. Therefore it is important to be able to study this dependance and check if it really exists. The problem examined in this thesis is the estimation of the Hurst index H of certain generalizations of the fBm from discrete data.

Topicality of the work

The estimation and modeling of the Hurst index has been a subject of intense studies lately. A whole set of methods and estimators have been proposed for the Gaussian processes of the fractional type. However little is known about the construction of the estimators when the considered process is a solution of a stochastic differential equation driven by the fBm. In the work of Berzin and León published in 2008 such estimators are given for several specific types of such equations, where the integrands are either constants or linear functions. Naturally it's desirable to obtain estimators for the solutions of the general case of stochastic differential equations driven by the fBm which would be simple to implement and computationally efficient.

Research object

The research objects are the solutions of stochastic differential equations driven by the fractional Brownian motion with the Hurst index $H > 1/2$.

The aim and tasks of the work

The aim of this work is to study the limit behavior of certain statistics based on the observed values of the process and use the obtained results to derive consistent estimators of the Hurst index H as well as to study the properties of these estimators. The tasks of this work are:

1. To study the limit behavior of the quadratic variations of the solutions of SIEs driven by the fBm both in the case of equally and non-equally spaced observations.

2. To derive consistent estimators of the Hurst index H based on quadratic variations.

3. To study the possibility of applying the increment ratios (IR) statistic to estimate the Hurst index H of the solutions of SIEs driven by the fBm.

4. To compare the performance of the obtained estimators to that of other known estimators.

Applied methods

In the theoretical part of the work the p-variation calculus techniques have been applied along with an array of known inequalities. As for the modelling part of the work, the fractional Brownian motion sample paths were generated using the circular matrix embedding method as described by Coeurjolly in 2000. All calculations were performed using the `R` software package.

Scientific novelty

It was shown that the estimators of the Hurst index H originally obtained by Istas and Lang in 1997 as well as Benassi et al in 1998 for the fBm retain their properties when the underlying process is a solution of a stochastic differential equation, which is not necessarily Gaussian. Additionally, it was proved that the IR statistic estimator originally presented in the work of Bardet and Surgailis published in 2010 can be used to estimate the Hurst index H of the fractional geometric

Brownian motion. Furthermore, the convergence rate of the modified Gladyshev Hurst index estimator has been derived.

Practical value of the work results

The estimators studied in this work are suitable for a wide spectrum of processes including the fractional Ornstein-Uhlenbeck process and the fractional geometric Brownian motion. For the latter two models, the estimators were additionally studied through simulated data. They are easy to implement, computationally efficient and do not impose any specific requirements on the sample path lengths.

Statements presented for defence

1. Two strongly consistent estimators of the Hurst index H of the solution of a stochastic differential equation driven by the fractional Brownian motion have been obtained which is a non-covering extension of the results known up to date.
2. It was shown that the IR statistic estimator of the Hurst index H is applicable to the fractional geometric Brownian motion.
3. The convergence speed of the modified Gladyshev estimator has been obtained.
4. Computer modelling suggests that the performance of the obtained estimators is comparable to or better than that of other estimators considered in this non-exhaustive study.

Approval of the work results

On the topic of dissertation there were 6 papers published in reviewed scientific journals. The research results were reported at 5 scientific conferences, of which 2 – international.

The scope of the scientific work

The dissertation consists of the introduction, three chapters, the conclusions, the references, the list of author's publications and two appendices. The total scope of the dissertation is 78 pages, 5 tables, 4 figures and 34 items of reference.

The first chapter is the introduction which presents the considered stochastic differential equation, the overview of other authors' works on the topic of dissertation and introduces some common definitions used further on.

The second chapter presents the obtained theoretical results, namely the asymptotics of the quadratic variations of the solutions of stochastic differential equations driven by the fBm and the estimators of the Hurst index H. Additionally, the usage of the IR statistic based estimator to estimate the Hurst index of the solutions of SDEs is considered; it's proved that if the underlying process is the fractional geometric Brownian motion, then the almost sure convergence of the IR statistic holds. Moreover, the convergence rates of the modified Gladyshev estimator are studied.

The third chapter shows the comparison of performance of the obtained estimators of the Hurst index H with that of other known estimators for a Gaussian (fractional Ornstein-Uhlenbeck) and a non-Gaussian (fractional geometric Brownian motion) processes.

General conclusions

1. Having proved the Theorems 1, 3, 6 and 8, the asymptotics of quadratic variations of the solution of the stochastic differential equation (1) were derived both in case of regularly and irregularly spaced observations.
2. In case of regularly spaced observations, in Theorem 2 and Theorem 4 it was proved that $\widehat{H}^n_{dv1}$ and $\widehat{H}^n_{dv2}$, the estimators of the Hurst index H originally obtained by Istas and Lang as well as Benassi et al for the fractional Brownian motion remain strongly consistent when the underlying process is the solution of the stochastic differential equation. In case of irregularly spaced observations, in Theorem 7 it was shown that $\widetilde{H}^n_{dv1}$, the proposed estimator of the Hurst index H based on the first order quadratic variations is strongly consistent.
3. In Theorem 9 it was proved that the obtained estimators remain strongly consistent if the solution of the stochastic differential equation is replaced with its Milstein approximation.
4. In Theorem 10 it was proved that the increment ratio statistic can be applied to estimate the Hurst index H of the fractional geometric Brownian motion.
5. In Theorem 11 the rate of convergence of the modified Gladyshev estimator of the Hurst index H to its real value was derived.
6. The obtained estimators were compared to some of the other known estimators, namely the naive and ordinary least squares Gladyshev and η-summing oscillation estimators, the variogram estimator and the IR estimator. The results of the modelling study suggest that if the value of the Hurst index is large ($H > 3/4$) or when the Hurst index is estimated from a sufficiently long sample path ($N > 2^{10}$), the $\widehat{H}_{dv2}$ estimator performs best. If either of these assumptions is not present, then $\widehat{H}_{dv1}$ and $\widehat{H}_{var}$ would likely provide a more precise estimate.

About the author

Dmitrij Melichov was born in Panevėžys on the 23rd of July, 1983.

In 2001 he concluded the correspondence course at the Moscow institute of Physics and Technology. He obtained the bachelor degree in Engineering informatics at the Vilnius Gediminas technical university in 2005, and a master's degree in statistics at the Vilnius Gediminas technical university in 2007. In 2007–2011 he'd been undertaking the doctoral studies in Mathematics at the Vilnius Gediminas technical university. He has been working at the Vilnius Gediminas technical university since 2005.