VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

Michail POPOV

TAMPRIŲ PLASTINIŲ GEOMETRIŠKAI NETIESINIŲ STRYPINIŲ KONSTRUKCIJŲ OPTIMIZAVIMAS RIBOJANT POSLINKIUS

DAKTARO DISERTACIJA

TECHNOLOGIJOS MOKSLAI,
STATYBOS INŽINERIJA (02T)

VGTU
LEIDYKLA
TECHNIKA
Vilnius 2014

Disertacija rengta 2006–2014 metais Vilniaus Gedimino technikos universitete.

Disertacija ginama eksternu.

Mokslinis konsultantas

prof. habil. dr. Juozas ATKOČIŪNAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

Mokslinis vadovas (2006–2010)

prof. dr. Romanas KARKAUSKAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

Vilniaus Gedimino technikos universiteto Statybos inžinerijos mokslo krypties disertacijos gynimo taryba:

Pirmininkas

prof. habil. dr. Gintaris KAKLAUSKAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

Nariai:

dr. Raimondas BLIŪDŽIUS (Kauno technologijos universitetas, statybos inžinerija – 02T),
prof. dr. Jaan LELLEP (Tartu universitetas, mechanikos inžinerija – 09T),
prof. dr. Arnoldas NORKUS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T),
prof. habil. dr. Henrikas SIVILEVIČIUS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

Disertacija bus ginama viešame Statybos inžinerijos mokslo krypties disertacijos gynimo tarybos posėdyje **2014 m. birželio 16 d. 14 val.** Vilniaus Gedimino technikos universiteto senato posėdžių salėje.
Adresas: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva.
Tel.: (8 5) 274 4956; faksas (8 5) 270 0112; el. paštas doktor@vgtu.lt
Pranešimai apie numatomą ginti disertaciją išsiųsti 2014 m. gegužės 15 d.
Disertaciją galima peržiūrėti interneto svetainėje http://dspace.vgtu.lt/ ir Vilniaus Gedimino technikos universiteto bibliotekoje (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lietuva).

VGTU leidyklos TECHNIKA 2251-M mokslo literatūros knyga

ISBN 978-609-457-686-7

© VGTU leidykla TECHNIKA, 2014
© Michail Popov, 2014
michail.popov@vgtu.lt

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY

Michail POPOV

OPTIMIZATION OF GEOMETRICALLY NONLINEAR ELASTIC PLASTIC FRAMEWORK STRUCTURES UNDER DISPLACEMENT CONSTRAINTS

DOCTORAL DISSERTATION

TECHNOLOGICAL SCIENCES,
CIVIL ENGINEERING (02T)

VGTU
LEIDYKLA
TECHNIKA
Vilnius 2014

Doctoral dissertation was prepared at Vilnius Gediminas Technical University in 2006–2014.

The dissertation is defended as an external work.

Scientific Consultant

Prof Dr Habil Juozas ATKOČIŪNAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T).

Supervisor (2006–2010)

Prof Dr Romanas KARKAUSKAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T).

The Dissertation Defense Council of Scientific Field of Civil Engineering of Vilnius Gediminas Technical University:

Chairman

Prof Dr Habil Gintaris KAKLAUSKAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T).

Members:

Dr Raimondas BLIŪDŽIUS (Kaunas University of Technology, Civil Engineering – 02T),
Prof Dr Jaan LELLEP (Tartu University, Mechanical Engineering – 09T),
Prof Dr Arnoldas NORKUS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T),
Prof Dr Habil Henrikas SIVILEVIČIUS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Dissertation Defense Council of Civil Engineering in the Senate Hall of Vilnius Gediminas Technical University at **2 p. m. on 16 June 2014**.

Address: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania.
Tel.: +370 5 274 4956; fax +370 5 270 0112; e-mail: doktor@vgtu.lt

A notification on the intend defending of the dissertation was send on 15 May 2014.

A copy of the doctoral dissertation is available for review at the Internet website http://dspace.vgtu.lt/ and at the Library of Vilnius Gediminas Technical University (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lithuania).

Reziumė

Disertaciniame darbe aprašyti autoriaus sudaryti geometriškai netiesinių tamprių plastinių statybinių strypinių konstrukcijų skaičiavimo ir optimizavimo uždavinių, ribojant konstrukcijos poslinkius, matematiniai modeliai. Sukurtas geometriškai netiesinių erdvinių strypinių konstrukcijų optimizavimo, ribojant poslinkius, uždavinio sprendimo originalus algoritmas. Disertaciją sudaro įvadas, trys skyriai, rezultatų apibendrinimas, naudotos literatūros ir autoriaus publikacijų disertacijos tema sąrašai bei 8 priedai.

Įvadiniame skyriuje aptariama tiriamoji problema, aprašomas tyrimų objektas ir metodai, formuluojamas darbo tikslas bei uždaviniai, aprašomas darbo mokslinis naujumas bei aktualumas, darbo rezultatų praktinė reikšmė. Įvado pabaigoje pristatomos disertacijos tema autoriaus paskelbtos publikacijos ir pranešimai konferencijose bei disertacijos struktūra.

Pirmajame skyriuje analizuojamos projektavimo ir konstrukcijų optimizavimo uždavinių sąsajos, pateikiama trumpa konstrukcijų optimizavimo metodų analitinė apžvalga. Nagrinėjama netamprių geometriškai netiesinių plieninių rėminių konstrukcijų optimizavimo ribojant poslinkius problematika. Aprašomos pasirinktos pagrindinės prielaidos ir fizinės priklausomybės bei dydžiai, apibrėžiantys konstrukcijos įtemptąjį-deformuotąjį būvį (ĮDB). Pateikiamas konstrukcijų optimizavimo uždavinio matematinis modelis. Pasiūlomas algoritmas šiam uždaviniui spręsti. Apžvelgiamos optimizavimo uždavinio skaitinės realizacijos galimybės.

Antrajame skyriuje pateikiami tikrojo ĮDB nustatymo metodai – tampraus skaičiavimo netiesinė analizė bei tamprių plastinių konstrukcijų analizė. Pristatomas šių metodų formulavimas, reikalingų dydžių nustatymas bei skaitinės realizacijos galimybės. Pagrindžiamas ekstreminio energinio principo taikymas sprendžiant optimizavimo uždavinius. Pateikiami skaitinio eksperimento rezultatai.

Trečiajame skyriuje pateikiamas konstrukcijų optimizavimo uždavinio, ribojant poslinkius, matematinis modelis. Detalizuojma optimizavimo uždavinio sprendimo strategija: poslinkių kitimo metodika, išplėstinio algoritmo konvergencijos kokybė, vystantis geometriniam netiesiškumui. Pateikiami skaitinio eksperimento pagal siūlomą išplėstinį algoritmą rezultatai.

Disertacijos tema paskelbti 7 straipsniai: vienas – straipsnių rinkinyje, įtrauktame į Thomson ISI sąrašą, trys – kitose duomenų bazėse; du – tarptautinių konferencijų medžiagose; vienas – Lietuvos konferencijos medžiagoje. Disertacijos tema perskaityti 6 pranešimai Lietuvos bei kitų šalių konferencijose.

Abstract

The optimization mathematical models of geometrically nonlinear elastic plastic frameworks structures optimization under displacement constraints are created in the thesis. Original solution algorithm was created for the optimization of geometrically nonlinear elastic-plastic frameworks structures under displacement constraints. The dissertation consists of introduction, 3 chapters, conclusions, references and 8 annexes.

The introduction reveals the investigated problem, the object of research and describes the purpose and tasks of the thesis, research methodology, scientific novelty, the practical significance of results examined in the thesis. The introduction ends in presenting the author's publications on the subject of the defended dissertation, offering the material of made presentations in conferences and defining the structure of the dissertation.

Construction design and structures optimization problems correlation is describing in chapter 1. Short historical review of optimization methods and structures optimization analytical analysis are presented. Reviewing problematic of non-elastic geometrically nonlinear steel frame structures optimization under displacements constraints. Describing basic accepted assumptions and physical dependences and values describing structures real stress-strain state (SSS). Structure optimization problem mathematical model is presented. Algorithm for such optimization problem solution is suggested. Optimization problem numerical realization possibilities are presented.

Elastic calculation nonlinear analysis and elastic plastic structure's analysis – methods for real structure's stress-strain state determination are presented in chapter 2. Methods formulation, necessary values determination and possibility of numerical realization are presented. Usage of extreme energy principle for optimization problems substantiated. Numerical experiment results are presented.

Structure optimization under displacements constraints problem mathematical model is presented in chapter 3. Strategy of optimization problem calculation is detailed: displacements variation methodic, and extended algorithm convergence quality for geometrical nonlinearity occurring. Results of numerical experiment by suggesting algorithm are presented.

7 articles focusing on the subject of the discussed dissertation are published: one into Thomson ISI database; three in other databases; two in international conferences proceedings; one in Lithuanian conference proceeding. 6 presentations on the subject have been given in conferences at national and international level.

Žymėjimai

Simboliai

A – skerspjūvio plotas;

$\mathbf{A}$ – pusiausvyros lygčių koeficientų matrica;

b – skerspjūvio plotis;

$\mathbf{C}$ – poslinkių funkcijų koeficientų prie polinomų matrica;

$\mathbf{D}$ – bendrojo Huko dėsnio pasiduodamumo matrica;

E – tamprumo modulis (Jungo modulis);

$\mathbf{F}$ – apkrovos vektorius;

F – išorinė koncentruota jėga;

f_u – konstrukcijos medžiagos stiprumo (takumo) riba;

G – konstrukcijos medžiagos šlyties modulis;

$\bar{\mathbf{G}}$ – liekamųjų įrąžų infliuentinė matrica;

h – baigtinio elemento skerspjūvio aukštis;

$\mathbf{H}$ – poslinkių darnos matrica;

$\bar{\mathbf{H}}$ – liekamųjų poslinkių infliuentinė matrica;

I – skerspjūvio inercijos momentas;

I_t – sukimo konstanta;

$\mathbf{K}_e$ – mažų poslinkių (tampraus skaičiavimo) standumo matrica;

$\mathbf{K}_g$ – geometrinė standumo matrica;

$\mathbf{K}_u$ – pradinių poslinkių standumo matrica;

$\mathbf{K}_\tau$ – tangentinė standumo matrica;

l – elemento ilgis;

$\mathbf{L}$ – konstrukcijos elementų ilgių vektorius

M – lenkimo momentas;

M_0 – ribinis lenkimo momentas;

N – ašinė jėga;

N_0 – ribinė ašinė jėga;

$\mathbf{P}$ – poslinkių funkcijų koeficientų matrica;

S – kūno paviršius;

$\mathbf{S}$ – tikrųjų įrąžų vektorius;

$\mathbf{S}_0$ – ribinių įrąžų vektorius;

$\mathbf{S}_e$ – tampraus sprendinio įrąžų vektorius;

$\mathbf{S}_r$ – liekamųjų įrąžų vektorius;

S_u – kūno paviršiaus dalis, kurioje kūno poslinkiai yra apriboti;

$\mathbf{T}$ – krypčių kosinusų matrica;

T – sukimo momentas;

t – skerspjūvio storis;

u – poslinkis;

$\mathbf{u}$ – poslinkių vektorius;

U – potencinė deformavimo energija;

V – konstrukcijos tūris;

W_{pl} – plastinis atsparumo momentas;

W_t – laisvo sukimo atsparumo momentas;

$\boldsymbol{\gamma}_k(x)$ – k-ojo baigtinio elemento skersinė deformacija;

γ – koeficientas;

Δ – linijinė deformacija;

ε – deformacija;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ – deformacijų vektorius;

θ – skersinė deformacija;

$\boldsymbol{\kappa}$ – kreivis;

$\boldsymbol{\lambda}$ – Lagranžo daugiklių vektorius;

Π – pilnutinė diskretizuoto kūno potencinė energija;

σ – įtempiai;

$\boldsymbol{\tau}$ – skersinių įtempių vektorius;

τ_y – takumo įtempis grynosios šlyties metu;

φ – kampinė deformacija;

$\boldsymbol{\Phi}$ – konstrukcijos stiprumo (takumo) sąlygų koeficientų matrica;

$\boldsymbol{\Psi}$ – vidinių jėgų vektorius;

Ω – potencinė išorinių jėgų energija (išorinių jėgų potencialas).

Santrumpos

BEM – baigtinių elementų metodas;

ĮDB – įtemptas deformuotas būvis.

Turinys

ĮVADAS 1
Problemos formulavimas 1
Darbo aktualumas 2
Tyrimų objektas 3
Darbo tikslas 3
Darbo uždaviniai 3
Tyrimų metodai 4
Darbo mokslinis naujumas 4
Darbo rezultatų praktinė reikšmė 4
Ginamieji teiginiai 5
Darbo rezultatų aprobavimas 5
Disertacijos struktūra 6
1. KONSTRUKCIJŲ OPTIMIZAVIMAS VERTINANT KOMPLEKSINIUS APRIBOJIMUS 7
1.1. Projektavimo ir konstrukcijų optimizavimo uždavinių sąsajos 8
1.2. Optimizavimo metodų istorinė apžvalga 9
1.3. Konstrukcijų optimizavimo metodų analitinė apžvalga 12
1.4. Netamprių geometriškai netiesinių plieninių rėminių konstrukcijų optimizavimas ribojant poslinkius 15
1.5. Pagrindinės prielaidos ir fizinės priklausomybės 17
1.6. Pagrindiniai dydžiai, aprašantys konstrukcijos įtemptą deformuotą būvį 19
1.7. Konstrukcijų optimizavimo uždavinio matematinis modelis 20
1.8. Optimizavimo uždavinių skaitinė realizacija 22
1.9. Pirmojo skyriaus išvados ir disertacijos uždavinių formulavimas 24
2. GEOMETRIŠKAI NETIESINIŲ KONSTRUKCIJŲ ANALIZĖ 27
2.1. Konstrukcijos tangentinė standumo matrica 28
2.2. Rėminis strypinis erdvinis elementas 31
2.2.1. Elemento formos funkcijos 31

2.2.2. Deformacijų aproksimacija mazginiais poslinkiais 38
2.2.3. Elemento tangentinė standumo matrica 40
2.2.4. Ekvivalentinių apkrovos jėgų apskaičiavimas 46
2.3. Tangentinio standumo metodo skaitmeninis realizavimas 48
2.4. Liekamųjų įrąžų analizės uždavinys 53
2.5. Liekamųjų poslinkių analizės uždavinys 55
2.6. Liekamųjų poslinkių analizės uždavinys taikant normatyvinius reikalavimus 56
2.7. Stiprumo sąlygos sudėtingo deformavimosi būviui 57
2.8. Ekstreminio energinio principo naudojimo pagrindimas 63
2.9. Analizės uždavinio skaitinė realizacija 66
2.10. Antrojo skyriaus išvados 71
3. KONSTRUKCIJŲ OPTIMIZAVIMO UŽDAVINYS RIBOJANT POSLINKIUS 73
3.1. Optimizavimo uždavinio ribojant poslinkius matematinis modelis 74
3.2. Konstrukcinių apribojimų parinkimas 76
3.3. Poslinkių kitimo ribų parinkimas 76
3.4. Optimizavimo uždavinio ribojant poslinkius pradinio taško parinkimas 78
3.5. Poslinkių skaičiavimas 78
3.6. Optimizavimo uždavinio sprendimo išplėstinis algoritmas 79
3.7. Skaitinė realizacija 79
3.8. Trečiojo skyriaus išvados 86
BENDROSIOS IŠVADOS 87
LITERATŪRA IR ŠALTINIAI 89
AUTORIAUS MOKSLINIŲ PUBLIKACIJŲ DISERTACIJOS TEMA SĄRAŠAS 97
SUMMARY IN ENGLISH 99
PRIEDAI[1] 117
A priedas. Tangentinės standumo matricos nustatymas 119
B priedas. Ekvivalentinių apkrovos jėgų nustatymas 131
C priedas. Dviejų aukštų rėmo analizės rezultatai 133
D priedas. Šešių aukštų rėmo optimizacija plastiškosios suirties etape 162
E priedas. Šešių aukštų rėmo analizės uždavinys 194
F priedas. Šešių aukštų rėmo optimizacija pagal siūlomą algoritmą 223
G priedas. Bendraautorių sutikimai teikti publikacijų medžiagą disertacijoje 264
H priedas. Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema kopijos 268

[1] Priedai pateikiami pridėtoje kompaktinėje plokštelėje

Contents

INTRODUCTION 1
Problem formulation 1
Relevance of the thesis 2
Research object 3
The goal of thesis 3
Tasks of the thesis 3
Research methods 4
Scientific novelty 4
The practical significance of thesis results 4
Defended statements 5
The approval of the results 5
Structure of thesis 6
1. THE STRUCTURE OPTIMIZATION UNDER COMPLEX CONSTRAINTS 7
1.1. Design and structure optimization problems relation 8
1.2. The historical review of optimization methods 9
1.3. The analytical review of structure optimization 12
1.4. The optimization of inelastic geometrically nonlinear steel frame structures under displacements constraints 15
1.5. Basic assumptions and physical dependences 17
1.6. Basic values for structure stress-strain state 19
1.7. The mathematical model of structure optimization problem 20
1.8. The numerical realization of optimization problem 22
1.9. The first chapter conclusions and thesis problems formulation 24

2. THE ANALYSIS OF GEOMETRICALLY NONLINEAR STRUCTURES 27
2.1. The tangent stiffness matrix of the structure 28
2.2. The space frame rod element 31
2.2.1. Form functions for element 31
2.2.2. Deformations approximation by nodal displacements 38
2.2.3. The tangent stiffness matrix of the element 40
2.2.4. The estimation of load equivalent forces 46
2.3. The numerical realization of the tangent stiffness method 48
2.4. The analysis problem of residual stresses 53
2.5. The analysis problem of residual displacements 55
2.6. The analysis problem of residual displacements by applying design code requirements 56
2.7. Strength conditions for combined strain state 57
2.8. Ekstreminio energinio principo naudojimo pagrindimas 63
2.9. The numerical realization of analysis problem 66
2.10. Second chapter conclusions 71
3. THE PROBLEM OF STRUCTURE OPTIMIZATION UNDER DISPLACEMENTS CONSTRAINTS 73
3.1. The mathematical model of optimization problem under displacements constraints 74
3.2. The choice of design constraints 76
3.3. The choice of constraints for displacements variations 76
3.4. The choice of start point for optimization problem under displacements constraints 78
3.5. Displacements calculations 78
3.6. Optimization problem solution extended algorithm 79
3.7. The numerical realization 79
3.8. Third chapter conclusions 86
GENERAL CONCLUSIONS 87
REFERENCES 89
THE LIST OF SCIENTIFIC AUTHOR'S PUBLICATIONS ON THE SUBJECT OF THE DISSERTATION 97
SUMMARY IN ENGLISH 99
ANNEXES[1] 117
Annex A. The determination of tangent stiffness matrix 119
Annex B. The determination of equivalent load forces 131
Annex C. The analysis of two story frame 133
Annex D. The optimization of six story frame prior to plastic collapse 162
Annex E. The analysis of six story frame 194
Annex F. The optimization of six storey frame by suggesting algorithm 223
Annex G. The co-authors agreement to present publication 264
Annex H. Copies of author scientific publications on the subject of thesis 268

[1] Annexes are provided in the attached CD-ROM

Įvadas

Problemos formulavimas

Konstrukcijų optimalus projektavimas grindžiamas normatyvinių dokumentų reikalavimais: saugos, tinkamumo bei konstruktyviniais. Statybinių konstrukcijų optimizavimas yra objekto kūrimas, kuris tenkintų projektavimo sąlygų reikalavimus ir atitiktų priimto kokybės kriterijaus geriausią vertę. Konstrukcijų optimizavimas – tai pirmasis etapas optimaliame konstrukcijų projektavime leidžiantis įvertinti aukščiau minėtus reikalavimus bei kompleksiškai aprašyti projektuojamos konstrukcijos darbą. Sudarius skirtingas konstrukcijų optimizavimo uždavinių formuluotes bei išsprendus uždavinius galima atsakyti į daugelį projektuotoją dominančių klausimų: koks yra tikrųjų įrąžų ir poslinkių pasiskirstymas, kokią apkrovą gali atlaikyti konstrukcija (patikrinamasis uždavinys), kokie turi būti elementų skerspjūvių geometriniai parametrai (projektinis uždavinys), siekiant užtikrinti saugų ir ilgalaikį konstrukcijos darbą.

Šiuolaikinės konstrukcijų projektavimo tendencijos susijusios su konstruktyvinių statybinių medžiagų taupymu. Vis daugiau normatyvinių dokumentų nurodo be tradicinio tiesinės teorijos skaičiavimų įvertinti ir konstrukcijos geometrinio netiesiškumo elgsenos aspektus. Tai pavyktu įvertinti tikrąjį konstrukcijos darbą, atsižvelgiant į plastines medžiagos savybes ir geometrinį konstrukcijos netiesiškumą, esant visoms galimoms darbo sąlygoms

jos eksploatavimo laikotarpiu. Toks konstrukcijų optimizavimo uždavinys negali būti išspręstas statybinės mechanikos tiesinės teorijos metodais, kadangi konstrukcijos geometrija prie atitinkamų apkrovų iš esmės keičiasi ir mažų poslinkių principas tampa nepatikimas. Viršijus stiprumo (takumo) ribą, Huko dėsnis daugeliui medžiagų nebegalioja ir keičiamas netiesine įtempių ir deformacijų priklausomybe. Taigi, reikia atsisakyti tiesinės teorijos prielaidų ir pereiti prie žymiai platesnių ir sudėtingesnių netiesinės teorijos pritaikymų:

1. Reikia atsisakyti skaičiavimo pagal nedeformuotą būvį, kuris toleruoja mažus poslinkius.
2. Reikia įvertinti konstrukcijos geometrijos pasikeitimo įtaką jos įtempių deformacijų būviui (ĮDB).
3. Pereiti prie netiesinio įtempių ir deformacijų ryšio, atsižvelgiant į atsirandančias plastines deformacijas (konstrukcijos dar iki plastiškojo suirimo įgauna didelius poslinkius ir gali netenkinti normalios eksploatacijos reikalavimų).
4. Parinkti tokias konstrukcijos elementų stiprumo sąlygas, kurios adekvačiai apibrėžtų konstrukcijų darbą. Įvairių šalių normatyviniuose dokumentuose pateiktos ištiesintos stiprumo sąlygos, kurios ženkliai riboja konstrukcijų darbą. Tad tenka naudoti literatūroje ar kitų autorių darbuose pateiktas stiprumo sąlygas, turinčias sąlyginai platesnę stiprumo ribą.
5. Tiksliai vertinti tikrojo ĮDB poslinkius optimizavimo uždavinio poslinkių ribojimų sudarymui.

Įvertinus visus aukščiau išvardintus aspektus sudaromas matematinis modelis, kurio tiesioginis sprendimas yra gana sudėtinga problema. Darbe siūlomas originalus sprendimo algoritmas leidžiantis išvengti sunkumų, kylančių sprendimo metu bei labiau kontroliuoti optimizavimo uždavinio sprendimo procesą.

Darbo aktualumas

Disertaciniame darbe sudaryti geometriškai netiesinių tamprių plastinių statybinių strypinių konstrukcijų skaičiavimo ir optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai, ribojant konstrukcijos poslinkius. Sukurtas geometriškai netiesinių erdvinių strypinių konstrukcijų optimizavimo, ribojant poslinkius, uždavinio sprendimo originalus algoritmas, leidžiantis panaudoti šiuolaikines kompiuterines

technologijas. Tai statybos inžinerijos praktikoje atveria naujas galimybes taupant medžiagas bei išteklius konstrukcijų projektavimo ir gamybos stadijose.

Tyrimų objektas

Disertaciniame darbe nagrinėjami geometriškai netiesinių tamprių plastinių strypinių konstrukcijų optimizavimo uždaviniai, ribojant poslinkius, jų matematinių modelių sudarymas ir šių optimizavimo uždavinių sprendimo galimybės.

Darbo tikslas

Sukurti geometriškai netiesinių tamprių plastinių erdvinių strypinių konstrukcijų optimizavimo uždavinio matematinio modelio, įvertinančio projektavimo reikalavimus ir sąlygas, sprendimo originalų algoritmą. Šis sukurtas algoritmas leistų kontroliuoti konstrukcijos deformatyvumą iteracinio proceso metu ir užtikrina uždavinio sėkmingą konvergenciją.

Darbo uždaviniai

Darbo tikslui pasiekti reikia spręsti šiuos uždavinius:

1. Atlikti mokslinės literatūros apžvalgą apie netamprių geometriškai netiesinių plieninių rėminių konstrukcijų optimizavimą ribojant poslinkius.
2. Plėtoti erdvinio baigtinio elemento tangentinės standumo matricos sudarymo metodiką ir simbolinių skaičiavimų programą šios matricos išraiškai gauti.
3. Sudaryti geometriškai netiesinės tamprios plastinės erdvinės strypinės konstrukcijos analizės uždavinio matematinį modelį, išspręsti šį uždavinį. Atlikti lyginamąją gautų sprendimo rezultatų analizę su kitų tyrėjų gautais rezultatais.
4. Sudaryti tamprių plastinių geometriškai netiesinių erdvinių strypinių konstrukcijų, ribojant poslinkius, optimizavimo uždavinio matematinį modelį ir gauti skaitinius šio optimizavimo uždavinio sprendimo rezultatus. Atlikti lyginamąją gautų sprendimo rezultatų analizę.
5. Sujungti antros eilės tampraus skaičiavimo, tamprios plastinės konstrukcijos analizės bei optimizavimo, ribojant poslinkius, uždavinius į vieną bendrą iteracinį sprendimo algoritmą.

6. Naudojant sukurtą programinę įrangą, modeliavimo būdu patikrinti siūlomo optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmo veiksmingumą ir efektyvumą.

Tyrimų metodai

Darbe taikomi skaitinio modeliavimo metodai: baigtinių elementų metodas, Niutono-Rafsono netiesinių lygčių sprendimo metodas, netiesinių optimizavimo uždavinių sprendimo metodai.

Darbo mokslinis naujumas

Siūlomo originalaus konstrukcijų optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmo principai gali būti taikomi skaičiuojant bet kokio tipo konstrukcijas.

Ištirta erdvinio baigtinio elemento tangentinė standumo matricos sudarymo metodika, kuri gali būti taikoma, nustatant kitų baigtinių elementų tipų tangentinių standumo matricų išraiškas. Metodikos principai gali būti panaudoti kuriant simbolinių skaičiavimų programas kitų baigtinių elementų tipų tangentinių matricų išraiškoms gauti.

Sudarytas geometriškai netiesinių tamprių plastinių erdvinių strypinių konstrukcijų analizės uždavinio matematinis modelis bei išspręstas analizės uždavinys, naudojant netiesines stiprumo sąlygas, kuris leidžia nustatyti nagrinėjamos konstrukcijos tikrąjį ĮDB artimą realios konstrukcijos darbui. Analizės rezultatai buvo palyginti su kitų autorių tirtų realių konstrukcijų bandymų rezultatais.

Suformuluotas ir išspręstas konstrukcijų optimizavimo uždavinys, naudojant netiesines stiprumo ir poslinkių ribojimo sąlygas bei įvertinant konstrukcijos tikrąjį ĮDB.

Darbo rezultatų praktinė reikšmė

Pasiūlytas geometriškai netiesinių tamprių plastinių plieninių erdvinių strypinių konstrukcijų optimizavimo uždavinio matematinio modelio sprendimo algoritmas, apimantis saugos, tinkamumo ir konstruktyvinius reikalavimus, gali būti taikomas projektuojant arba rekonstruojant realias konstrukcijas.

Ginamieji teiginiai

Disertacijos ginamieji teiginiai:

1. Norint, kad skaičiavimas atitiktų realias konstrukcijų darbo sąlygas, visų pirma skaičiuojant reikia atsižvelgti į medžiagų plastines savybes, kuriomis pasižymi ne maža konstrukcijų (ypač metalinių) dalis, bei jų deformuoto būvio geometriškai netiesinę elgseną.
2. Matematinio programavimo teorija ir mechanikos ekstreminiai energiniai principai suteikia galimybę sudaryti naujus geometriškai netiesinių tamprių plastinių statybinių strypinių konstrukcijų optimizavimo uždavinių matematinius modelius, ribojant konstrukcijos poslinkius, bei šių uždavinių sprendimo algoritmus ir metodus.
3. Tamprių plastinių geometriškai netiesinių konstrukcijų optimizavimo metodų tobulinimas yra teorinis ir praktinis pagrindas statybinių konstrukcijų eksperimentinei-mokslinei plėtrai: naujos galimybės medžiagų bei išteklių taupymui konstrukcijų projektavimo ir gamybos stadijose.

Darbo rezultatų aprobavimas

Disertacijos tema yra atspausdinti septyni moksliniai straipsniai: vienas – mokslo žurnale, įtrauktame į *ISI Web of Science* duomenų bazę (Karkauskas, Popov 2011); trys – kituose duomenų bazėse (Popov *et al.* 2013; Karkauskas, Popov 2009 a; Karkauskas, Popov 2009 b); vienas – recenzuojamoje užsienio tarptautinės konferencijos medžiagoje (Каркаускас and Попов 2007); vienas – recenzuojamoje Lietuvos tarptautinės konferencijos medžiagoje (Popov *et al.* 2010); vienas – nerecenzuojamoje Lietuvos konferencijos medžiagoje (Popov, Karkauskas 2007).

Disertacijoje atliktų tyrimų rezultatai buvo paskelbti septyniose mokslinėse konferencijose Lietuvoje ir užsienyje:

- Jaunųjų mokslininkų konferencijoje „*Lietuva be mokslo – Lietuva be ateities*“ 2007 m. Vilniuje;
- Jaunųjų mokslininkų konferencijoje „*Mokslas – Lietuvos ateitis*“ 2009 m. Vilniuje;
- Jaunųjų mokslininkų konferencijoje „*Mokslas – Lietuvos ateitis*“ 2012 m. Vilniuje;
- Tarptautiniame simpoziume „*Проблемы современного бетона и железобетона*“ 2007 m. Minske, Baltarusijoje;

- Tarptautinėje mokslinėje konferencijoje „*Modern building materials, structures and techniques*“ 2010 m. Vilniuje;
- Tarptautinėje mokslinėje konferencijoje „*Optimization and Analysis of Structures*“ 2011 m. Tartu, Estijoje;
- Tarptautinėje konferencijoje „*Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений“ („Золотовские чтения“)*. 2013 m. Maskvoje, Rusijoje.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, trys skyriai ir rezultatų apibendrinimas. Taip pat yra 8 priedai.

Darbo apimtis yra 118 puslapių, neskaitant priedų, tekste panaudotos 144 numeruotos formulės, 32 paveikslai ir 12 lentelių. Rašant disertaciją buvo panaudoti 104 literatūros šaltiniai.

1

Konstrukcijų optimizavimas vertinant kompleksinius apribojimus

Skyriuje aprašomos konstrukcijų projektavimo ir jų optimizavimo uždavinių sąsajos. Atlikta optimizavimo uždavinių formulavimo ir jų sprendimo metodų analitinė bei trumpa istorinė apžvalga. Dėmesys sutelktas disertacijos problematikai: netamprių geometriškai netiesinių plieninių rėminių konstrukcijų optimizavimui, ribojant mazgų poslinkius. Aprašomos pagrindinės disertacijoje taikomos prielaidos, fizikinės priklausomybės bei dydžiai, charakterizuojantys konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvį (ĮDB). Pateikiamas disertacijos autoriaus sudarytas konstrukcijų optimizavimo uždavinio bendrasis matematinis modelis ir bendrasis algoritmas šio uždavinio skaitinei realizacijai.

Skyriaus tematika yra paskelbti (kartu su bendraautoriais) trys disertanto straipsniai (Popov and Karkauskas 2007; Каркаускас and Попов 2007; Karkauskas and Popov 2009 b). Rezultatai buvo aprobuoti: jaunųjų mokslininkų konferencijoje „*Mokslas – Lietuvos ateitis*“ (2007 m.); tarptautiniame simpoziume „*Проблемы современного бетона и железобетона*“ (2007 m.) Minske, Baltarusijoje; tarptautinėje mokslinėje konferencijoje „*Optimization and Analysis of Structures*“ 2011 m. Tartu, Estijoje; Tarptautinėje konferencijoje „*Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений“ („Золотовские чтения“)*, 2013 m. Maskvoje, Rusijoje.

1.1. Projektavimo ir konstrukcijų optimizavimo uždavinių sąsajos

Projektavimo uždavinys – tai statinių arba atskirų konstrukcijų, privalančių per nustatytą laikotarpį atlikti tam tikras funkcijas ir būti patikimais juos eksploatuojant, projekto rengimas. Pageidautina, kad statybos, o vėliau ir eksploatacijos sąnaudos būtų minimalios. Tradiciniame statybinių konstrukcijų projektavimo procese inžinieriui projektuotojui, remiantis savo patirtimi ir intuityviais samprotavimais, tenka nustatyti daugybę konstrukcijos parametrų. Pavyzdžiui, dėl architektūrinių, funkcinių reikalavimų apibrėžti pradinius laikančiųjų konstrukcijų, net elementų skerspjūvių matmenis bei kitus parametrus. Projektavimo normos įtakoja galutinį projektinį sprendimą. Šiuo atveju projektuotojas neišvengiamai nukrypsta nuo optimalaus sprendinio: nukrypimo dydis pirmiausia priklauso nuo jo kvalifikacijos, konstrukcijos sudėtingumo, papildomų projektinės užduoties reikalavimų. Kuo sudėtingesnė projektuojama konstrukcija, tuo mažesnės intuicijos galimybės optimalaus sprendimo paieškoje. Šiame kontekste mokslo literatūroje (Никитин and Чибиряков 1987; Рейтман and Ярин 1974) pateikiami įdomūs tyrimo rezultatai: dvidešimčiai projektuotojų buvo pasiūlyta pagal vienodus pradinius duomenis atlikti įvairių gelžbetoninių konstrukcijų projektavimą; rezultatai buvo gana netikėti – nesudėtingų konstrukcijų sąnaudų skirtumas siekė 5–7%, o sudėtingų – iki 40%. Pabrėžtina – tai buvo gauta, laikantis visų norminių dokumentų reikalavimų. Šie pavyzdžiai išryškina skirtingą projektuotojų atsargumo lygį bei parodo galimą teorinį resursų sutaupymą, renkantis galutinį projektą.

Pastaraisiais metais konstrukcijų projektavime plačiai taikomi kompiuteriniai analizės ir projektavimo metodai, tam talkina naujausios kompiuterinės programos, įvertinančios realias konstrukcijų darbo ir vis sudėtingėjančias kraštines sąlygas siekiant projekto kokybės. Plačiai taikomas baigtinių elementų metodas (BEM) yra naudojamas konstrukcijos įtempių, poslinkių, svyravimo dažnių ir kitų konstrukcijų projektavimui reikalingų duomenų nustatymui. Dažnai viso projektavimo metu yra naudojami skaitiniai ir net eksperimentiniai tyrimai kuriamo projekto kokybei įvertinti. Pagal šiuos tyrimus projektas keičiamas ir atliekama jo pakartotinė analizė, stengiantis pagerinti arba bent užtikrinti projektui keliamus reikalavimus. Toks tradicinis statinio projekto analizės ir tikrinimo kelias paprastai įmanomas, atsižvelgus tik į vieną-kitą projektą vertinančių kintamųjų (dažniausiai tik į vieną!), bet neįvertina kintamųjų visumos tarpusavio sąveikos. Tuo tarpu skaitinė optimizacija leidžia vienu metu įvertinti didelį projektavimo parametrų, tenkinančių eksploatacinius reikalavimus, skaičių ir tuo pačiu metu gauti geresnį projektą.

Skaitinės optimizacijos uždavinio bendroji formuluotė dažniausiai yra tokia:

Rasti $$f(\mathbf{x}) \to \min, \tag{1.1}$$

kai $$g_i(\mathbf{x}) \le 0, \qquad i = 1,...,\mathrm{m}, \tag{1.2}$$

$$x_j^L \le x_j \le x_j^U \qquad j = 1,...,\mathrm{n}. \tag{1.3}$$

Tikslo arba vertės funkcija $f(\mathbf{x})$ priklauso nuo projektavimo kintamųjų $\mathbf{x}$, kurie, pavyzdžiui, susideda iš konstrukcijų elementų skerspjūvių ar fizinių parametrų. Apribojimai (1.2) $g_i(\mathbf{x})$ užtikrina saugos būvio reikalavimus, tuo tarpu kintamųjų ribos, pateiktos (1.3) sąlygose yra vadinamos konstrukciniais apribojimais (dažniausiai naudojami optimalaus sprendinio paieškos srities tikslinimui, neleidžiant, pavyzdžiui, konstrukcijos elemento storiui įgyti neigiamas reikšmes). Jei reikia surasti funkcijos $f(\mathbf{x})$ maksimalią reikšmę, pavyzdžiui, nustatyti maksimalų konstrukcijos nuosavą dažnį, tai padaroma minimizuojant neigiamą funkcijos $f(\mathbf{x})$ išraišką.

Dažniausiai paplitę (1.2) apribojimai, kurie riboja įtempius įvairiuose konstrukcijos mazguose. Tada, jei $\overline{\sigma}$ yra viršutinė leistino įtempio riba, apribojimo funkcija normalizuota forma gali būti užrašoma taip:

$$\left(\sigma_{ijk} / \overline{\sigma}\right) - 1 \le 0, \tag{1.4}$$

čia i – strypo numeris; j – įtempio komponentas; k – apkrovos būvis.

Būtina paminėti, kad optimizavimo uždavinio matematinis modelis (1.1)–(1.3) gali būti papildytas apribojimais-lygybėmis:

$$h_k(\mathbf{x}) = 0, \qquad k = 1,...,l. \tag{1.5}$$

Matematinio programavimo uždavinio (toks yra konstrukcijų optimizavimo uždavinys (1.1)–(1.3)) sprendimo būdai gali būti grindžiami skirtingos kokybės algoritmais, kurie glaustai bus analizuojami kitame poskyryje. Iš karto pažymėtina, kad be darbų, kuriuose pristatomi nauji optimizacijos skaičiavimo būdai, algoritmai ir uždaviniai, periodiškai pasirodo ir tokie darbai, kuriuose apžvelgiama konstrukcijų optimizacijos vystymosi istorija (Schoofs 1993; Vanderplaats 1999, 2006).

1.2. Optimizavimo metodų istorinė apžvalga

Optimizavimo teorija ir matematiniai metodai yra neatskiriami. Jų egzistavimas siekia Niutono (*Sir Isaac Newton*, 1643–1727), Lagranžo (*Adrien-Marie Legendre* 1752–1833) ir Koši (*Augustin Louis Cauchy* 1789–1857) laikus. Variantinių skaičiavimų pagrindą padėjo Bernulis (*Jacob Bernoulli* 1654–1705), Euleris (*Leonhard Euler* 1707–1783), Lagranžas (*Adrien-Marie Legendre* 1752–1833) ir Vejerstrasas (*Karl Theodor Wilhelm Weierstraß* 1815–1897). Koši

(*Augustin Louis Cauchy* 1789–1857) pirmasis pritaikė greičiausio nusileidimo metodą besąlyginių minimizacijos uždavinių sprendimui. Laikoma, kad konstrukcijų optimizavimo istorijos pradžia sietina su XIX amžiaus antrąja puse (minėtini (Levi 1874) ir (Mitchell 1904) darbai). Nepaisant šių ankstyvųjų darbų iki pat XX amžiaus vidurio pažanga konstrukcijų optimizavimo srityje buvo labai maža. Tik vėliau, pradėjus sparčiai vystytis kompiuterinėms technologijoms, optimizavimo procedūrų įgyvendinimas tapo įmanomas ir tai paskatino tolesnius naujų metodų mokslinius tyrimus.

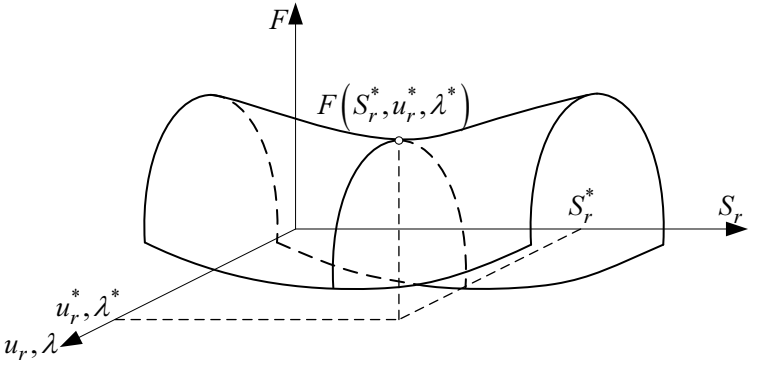
Manoma, kad šiuolaikinio optimizavimo, grindžiamo kompiuterinėmis technologijomis, pradžia sietina su klasikiniu tapusiu Šmito darbu (Schmit 1960). Šmitas savo publikacijose minėjo Kleino (Klein 1955) darbą, iš kurio jis pasisėmęs pagrindinių idėjų. Konstrukcijų optimizavimo raida neatsiejama nuo bendrųjų optimizavimo algoritmų plėtojimo. Bendroji optimizacija sukuria faktinius optimizavimo algoritmus, o konstrukcijų optimizavimas siūlo pažangius metodus efektyviam šių algoritmų panaudojimui. Tad prieš apžvelgiant konstrukcijų optimizacijos istorinę raidą, pateikiama optimizavimo algoritmų vystymosi raida.

Atsitiktinės paieškos metodai buvo labai populiarūs šeštajame bei septintajame praėjusio amžiaus dešimtmetyje. Šiuose metoduose, atsitiktinai parinkus nežinomųjų vektoriaus reikšmes, buvo atliekama uždavinio analizė ir jei buvo nustatoma, kad kažkuris projektas yra geresnis, jo ir buvo laikomasi. Toks skaičiavimas buvo atliekamas tol, kol nebesikeisdavo sprendimo rezultatai arba kol būdavo išnaudojami visi kompiuteriniai resursai (kas buvo įprasta tais laikais). Pasirenkamais dydžiais galėjo būti faktinės nežinomųjų reikšmės arba tų reikšmių pokyčiai. Kai kurie mokslininkai pastebėjo, kad po tam tikro laiko jie gali gauti projekto nežinomųjų reikšmių vektorių seką nuo blogiausio iki geriausio bei paspartinti šios sekos gavimo procesą. Tai galima pavadinti labai primityvia supaprastinta gradientine rezultatų paieška. Šie skaičiavimo metodai buvo lengvai programuojami, bet labai neefektyvūs ir apsiribodavo tik keliais kintamaisiais.

Nuo 1960 metų mokslininkų dėmesys buvo skirtas nuosekliam tiesiniam programavimui (*angl.* Sequential Linear Programming arba SLP) (Kelly 1960), nuoseklioms besąlyginio minimizavimo technikoms (*angl.* Sequential Unconstrained Minimization Techniques arba SUMT) (Fiacco and McCormick 1968) bei galimų krypčių metodams (*angl.* Feasible Directions methods) (Zoutendijk 1960). Nors tuo metu lygiagrečiai buvo kuriami ir negradientiniai metodai, tačiau paminėtieji, gradientais paremti metodai, buvo laikomi efektyvesniais ir patikimesniais.

1970-aisiais metais buvo plėtojami Lagranžo daugiklių (*angl.* Augmented Lagrange Multiplier) (Rockefellar 1973) bei apibendrintasis redukuoto gradiento (*angl.* Generalized Reduced Gradient) (Gabriel and Ragsdell 1977) metodai. Šių metodų pranašumas buvo stiprus jų teorinis pagrindas – Kuno ir Takerio (Kuhn-

Tucker) optimalumo sąlygos. Kuno ir Takerio pagrindinė idėja buvo sukurti efektyvų ir patikimą algoritmą, užtikrinantį balno taško (1.1 pav.) radimą. 1970-ųjų metų pabaigoje buvo pradėti plėtoti paviršiaus atsako (*angl.* Response Surface) metodai (Vanderplaats 1979; Myers *et al.* 2009), kurie yra vystomi ir dabartiniu metu.



1.1 pav. Balno funkcijos Kuno ir Takerio taškas
Fig. 1.1. Kuhn-Tucker point of the saddle function

1980 metų pradžia buvo optimizavimo algoritmų tikslinimo užbaigimo bei inžinerinėje bendruomenėje atsinaujinusio dėmesio atsitiktiniams metodams ir nuoseklioms besąlyginio minimizavimo technikoms (*angl.* Sequential Unconstrained Minimization Techniques arba SUMT) laikotarpis. Atsitiktiniai metodai apėmė genetinės paieškos (*angl.* Genetic Search) (Hajela 1990), imitacinio grūdinimo (*angl.* Simulated Annealing) (Nemhauser and Wolsey 1988) ir kitus susijusius metodus, kurie bandė imituoti gamtos evoliucijos procesus. Nuoseklios besąlyginio minimizavimo technologijos susitelkė ties vidinio taško metodais, grindžiamais Kuno ir Takerio (Kuhn-Tucker) sąlygomis (Hager *et al*. 1994). Genetiniai paieškos algoritmai 1990-aisiais metais buvo daugelio inžinerinės bendruomenės tyrimų dėmesio centre ir buvo papildyti nauju dalelių telkimosi (*angl.* Particle Swarming) metodu (Venter and Sobieszczanski-Sobieski 2003). Tuo tarpu mokslininkai, vykdę operacijų tyrimų tobulinimą, susikoncentravo ties vidinio taško metodais ir toliau pastaruosius tobulino. Inžinerinių uždavinių sprendimui buvo sukurtas išorinės baudos funkcijos (*angl.* Exterior Penalty Function) metodas, sprendžiantis labai didelio masto tolydžių ir diskrečių kintamųjų uždavinius (Vanderplaats 2004).

Optimizavimo algoritmams tobulėjant, jų inžinerinio taikymo apimtis ir sudėtingumas išaugo (nuo 1960-ųjų metų tai eksponentiškai bei pastoviai didėja).

1.3. Konstrukcijų optimizavimo metodų analitinė apžvalga

Dantzigo (Dantzig 1949) išvystytos tiesinio programavimo technologijos kartu su kompiuterinių technologijų atsiradimu leido panaudoti matematinį programavimą strypo ir rėminių konstrukcijų plastiniame projektavime (Heyman 1956). Intensyvi konstrukcijų optimizacija prasidėjo su anksčiau minėto darbo (Schmit 1960) paskelbimu. Tai buvo skaitinių sprendimo metodų paieškos laikotarpio pradžia. Šie metodai buvo bendresni nei anksčiau naudotieji, pagrįsti analitika (Shanley 1952). Šmitas buvo pirmasis, pateikęs išsamią matematinio programavimo technologijų panaudojimo galimybių ataskaitą: kaip išspręsti netiesiškai apribotą, netiesinį tamprių konstrukcijų projektavimo uždavinį, esant daugialypėms apkrovimo sąlygoms. Šmitas, norėdamas sukurti naują konstrukcijų sintezės uždavinių sprendimo technologiją, sujungė skaitinę optimizaciją, pagrįstą baigtinių elementų taikymu (išryškėjo galimybė rasti minimalaus svorio konstrukciją).

Šmitas nustatė, kad baigtinių elementų metodo taikymas projektavimo uždavinio užrašymui iš tikrųjų yra tai, ko reikėtų, norint rasti minimalaus svorio konstrukciją. Svarbu ir tai, kad nustatinėjant konstrukcijos mazgų poslinkius baigtinių elementų metodas tapo natūraliu įrankiu. Tai buvo galima padaryti naudojant žinomą lygčių sistemą:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{P}. \tag{1.6}$$

Elementų įtempiai (įrąžos) nustatomi, panaudojus apskaičiuotus poslinkius. Šmitas išsprendė minimalaus svorio konstrukcijos nustatymo uždavinį, dabar jau klasika tapusiai trijų strypų santvarai. Šis novatoriškas darbas inicijavo daugybę tyrimų septintajame praeito šimtmečio dešimtmetyje, dalis jų tęsiama ir dabar. Netrukus buvo nustatyta, kad gradientais pagrįsti optimizavimo metodai yra labiau efektyvūs sprendžiant matematinio programavimo, o tai reiškia, kad ir konstrukcijų optimizacijos uždavinius. Poslinkių ir įtempių dydžiai buvo nustatomi baigtiniu skirtumu, nes (1.6) lygtis poslinkiams nustatyti reikalauja naujo sprendimo: kaip neišreikštinė funkcija priklauso nuo projektavimo kintamųjų (kaip taisyklė, įtakojančių standumo matricą **K**). Foksas savo darbe (Fox 1965) pažymėjo šį neišreikštinį santykį, kaip baigtinių skirtumų dydžių pagrindimą. Iš esmės tai buvo lygties (1.6) diferencijuojamumo klausimas. Nuo to laikotarpio ĮDB dydžiai buvo apskaičiuojami analitiškai naudojant įvairius metodus (Haug *et al.* 1986), nepagrįstai ignoruojant citavimo prasme prioritetinius Fox darbus.

Likusiais minėtojo septintojo dešimtmečio metais buvo vykdomi intensyvūs, bet be praktinio pritaikymo konstrukcijų optimizavimo tyrimai. Iš tikrųjų šio dešimtmečio pabaigoje tapo akivaizdu, kad optimizavimo uždaviniai yra stipriai

apriboti jų skaitinės realizacijos prasme – nežinomųjų skaičius siekdavo vos penkiasdešimt, ir net tokiuose uždaviniuose realių konstrukcijų diskretiniams modeliams sudaryti buvo būtina pasitelkti daugiau nei šimtą baigtinių elementų. Atsižvelgiant į tuometinius kompiuterių pajėgumus, augant konstrukcijų diskretinių modelių kokybei (daugėja baigtinių elementų!), buvo aišku, kad konstrukcijų optimizavimas yra aklavietėje ir jos, kaip projektavimo įrankio, naudojimas yra labai brangus. Susiklosčiusi situacija vaizdžiai aprašyta darbe Gallatly *et al.* (1971), kuriame septintasis dešimtmetis yra pavadintas konstrukcijų optimizavimo „triumfo ir tragedijos periodu“.

Aštuntajame dešimtmetyje pradėta diskretizuoto optimalumo kriterijų metodų plėtra. Venkayya (1971) darbe, vadovaudamasis ankstesniu analitiniu (Prager and Taylor 1968) veikalu, pasiūlė efektyvų metodą uždaviniams su dideliu projektavimo kintamųjų skaičiumi spręsti. Glaustai tariant: optimalumo kriterijaus metodai yra efektyvūs, sprendžiant didelės apimties uždavinius, tačiau tik esant ribotam apribojimų, naudojamų sprendimo proceso metu, skaičiui.

Matematinio programavimo panaudojimui konstrukcijų optimizavimo srityje naujas impulsas buvo suteiktas 1974 metais, kai buvo paskelbtas (Schmit and Farshi 1974) darbas, kuriame buvo pateikta konstrukcijų sintezės aproksimacijos technologijų koncepcija. Ši koncepcija buvo patikslinta ir aprašyta gerokai plačiau (Schmit and Miura 1976). Šie metodai buvo grindžiami aproksimacijos kūrimo koncepcija naudojant fizikinį pagrindimą – tai leido daryti didelius skaičiavimų žingsnius ir labai sumažinti neišvengiamų detalių baigtinių elementų lygčių perskaičiavimų skaičių (maždaug nuo 100 iki 10). Buvo įrodyta, kad šios aproksimacijos tiksliai išlaiko įtempių ir poslinkių apribojimus statiškai išsprendžiamoms santvaroms ir kevalo konstrukcijoms. Lygiagrečiai aproksimacijos koncepcijai buvo sukurtas susijusių lygybių metodas gradiento apskaičiavimui (Arora and Haug 1979).

Darbe (Fleury and Sanders 1977) buvo pastebėtas tiesioginis ryšys tarp optimalumo kriterijų metodų (Venkayya 1971) ir matematinio programavimo, pabrėžiant, kad optimalumo kriterijai gali būti nagrinėjami pasitelkus matematinio programavimo dualumo teoriją. Be to prieš tai minėtų autorių darbe dar buvo pagrįsta aproksimacijos koncepcija kaip įrankis dideliems uždaviniams nagrinėti – skaitine optimizacija tapo įmanoma spręsti gana didelius projektavimo uždavinius, kartu išlaikant metodui būdingą bendrumą.

Devintajame dešimtmetyje plėtojami konstrukcijų optimizavimo metodai, algoritmai . Šio dešimtmečio pradžioje susiklosčiusi situacija pateikta (Schmit 1981; Ashley 1982; Vanderplaats 1982) darbuose. Antroji aproksimacijų karta buvo sukurta, naudojant jėgų aproksimacijas (Bofang and Zhanmei 1981; Vanderplaats and Selajegheh 1989) vietoje ankstesnių įtempių aproksimacijų. Šios aproksimacijos praplėtė kevalų, strypų ir daugelio kitų elementų optimizavimo galimybes. Svarbu pažymėti, kad tuo metu tokiose sistemose kaip

rėmai buvo įmanoma nagrinėti fizikinius matmenis kaip projektavimo kintamuosius, o skerspjūvių savybes – kaip tarpinius kintamuosius.

1960 metais buvo pradėti nagrinėti konstrukcijos formos (topologijos) optimizavimo uždaviniai. Čia buvo taikomi ir genetiniai algoritmai (Hayalioglu 2000; Rajan, Nguyen 2004; Sarma, Adeli 2000; Kim and Kwak, 2002), pagrįsti biologinių atrankos principų panaudojimu konstrukcijų optimizavimo realizacijos kompiuterinėse technologijose. Taip išvengiama projektuotojų nemėgstamų funkcijų išvestinių, kurios labai plačiai taikomos klasikiniuose konstrukcijų optimizavimo metoduose.

Konstrukcijų optimizavimo tema ir toliau išlieka aktuali, apie tai galima spręsti pagal didelį publikacijų šia tematika skaičių. Plėtojama ne tik konstrukcijų optimizavimo teorija, metodai ir skaičiavimo algoritmai, bet ir jų integracija su šiuolaikinėmis kompiuterinio modeliavimo ir automatizuoto projektavimo sistemomis (Atkočiūnas *et al.* 2008, Kaveh and Talatahari, 2010; Aydoğdu and Saka 2012, Doğan and Saka 2012; Hasançebi and Kazemzadeh Azad 2012).

Šiuolaikinius statybinių konstrukcijų optimizavimo metodus pagal jų sudėtingumą sąlyginai galima suskirstyti į tris lygius (Пермяков *et al.* 2008). Pirmajam lygiui priskiriamas variantinis projektavimas, numatantis kelius galimų būsimos konstrukcijos variantų nagrinėjimui bei gautų rezultatų palyginimą pagal tam tikrą konstrukcijos kokybę nustatantį kriterijų (dažniausiai pagal techninius-ekonominius rodiklius). Statinis skaičiavimas paprastai yra pirminis, nes konstruktyviai preliminariai nustatyti parametrai yra tikrinami pagal jų atitikimą nustatytiems reikalavimams, esant nustatytoms apkrovoms ir poveikiams. Techninių-ekonominių rodiklių palyginimas grindžiamas konstrukcijų tūrio (masės), jų gamybos ir montavimo sudėtingumo bei kainų tyrimu. Pagrindinis variantų palyginimo metodo trūkumas, yra tai, kad geriausiu galimu sprendiniu pasirenkamas vienas iš nagrinėtų variantų, kai tuo tarpu optimalus variantas gali likti nenagrinėtas.

Antrasis lygis – optimizavimas automatizuoto projektavimo rėmuose. Čia naudojamas statinis skaičiavimas, kuris yra atliekamas, pasitelkus konstrukcijų analizės kompiuterines technologijas su konstravimo blokų papildymais ir geometrinių bei fizinių parametrų variavimu. Naudojami algoritmai ir skaičiavimo programos grindžiami įvairiais optimizavimo metodais, pradedant nuo variantų palyginimo ir baigiant griežtu optimizavimo uždavinių matematiniu aprašymu. Kompiuterinių technologijų taikymas leidžia atsisakyti „rankiniam“ skaičiavimui charakteringų supaprastinimų, skaičiavimo schemų parinkimo, sąveikaujant atskiriems elementams ir kitų suvaržymų. Šiuo metu didžioji dalis praktikoje taikomų konstrukcijų optimizavimo uždavinių priklauso antrajam lygiui. Tai liudija, kad daugelis šiuolaikinių darbų šioje srityje orientuoti į lokalių uždavinių sprendimą (statinį skaičiavimą, elementų skerspjūvių pasirinkimą, mazgų ir jungčių skaičiavimą bei konstravimą, konstrukcijos dydžių unifikavimą

ir kt.) be gaunamų rezultatų ir realių projektavimo sąlygų tarpusavio įtakos įvertinimo.

Trečiasis optimizavimo lygis grindžiamas projektuojamos konstrukcijos teorine kokybės funkcijos analize. Geriausios (dažniausiai tai – racionaliausios) konstrukcijos bei jos parametrų pasirinkimo uždavinys sprendžiamas, atsižvelgiant į veikiančias apkrovas, skaičiavimo teorijos fizikinių prielaidų, medžiagų stiprumo sąlygų, standumo ir konstruktyvinius reikalavimus. Visų šių faktorių apjungimas viename uždavinyje bei jo nežinomųjų paieškos susiejimas su pasirinkto kriterijaus ekstremalia reikšme leidžia kuo detaliau aprašyti projektavimo procesą ir gauti rezultatą, artimą geriausiam konstrukcijos projekto sprendiniui.

Didelį indėlį į tamprių plastinių konstrukcijų optimizavimą matematinio programavimo metodais įnešė akademikas Aleksandras Čyras bei jo mokiniai A. Čižas, J. Atkočiūnas, R. Karkauskas, S. Kalanta ir kiti (Atkočiūnas 1994; Čyras *et al.* 2004; Kalanta 2007; Atkočiūnas and Čižas 2009; Atkočiūnas and Karkauskas 2010; Atkočiūnas 2011). Atliktų tyrimų rezultatai buvo skelbiami ir žinomi užsienyje (Čyras 1983; Карκаускас *et al.* 1990), o darbas (Karkauskas *et al.* 1995) buvo įvertintas Lietuvos valstybine mokslo premija. Šiuose darbuose išvystyta lenkiamų sistemų projektavimo metodika, pagrįsta ekstreminiu energiniu principu apie potencinės energijos minimumą ir išorinių jėgų papildomo darbo maksimumą. Sprendimo metu vertinami plastinių deformacijų vystymasis, konstrukcijos standumo sąlygos, pradiniai įtempiai.

1.4. Netamprių geometriškai netiesinių plieninių rėminių konstrukcijų optimizavimas ribojant poslinkius

Konstrukcijos optimizavimo uždavinio pagrindinis tikslas – konstrukcijos projektas, tenkinantis ribinius saugos ir tinkamumo būvių reikalavimus nuo įvairių išorinių poveikių. Tai galima užtikrinti tik turint išsamią informaciją apie konstrukcijos elgseną esant visoms galimoms darbo sąlygoms bet kuriuo jos egzistavimo laikotarpiu. Suprantama, kad tokia plačia apimtimi šis uždavinys, vadovaujantis statybinės mechanikos tiesinės teorijos metodais, negali būti išspręstas, nes konstrukcijos forma ir matmenys prie atitinkamų apkrovų iš esmės keičiasi dėl ko mažų poslinkių principas tampa nepatikimas. Be to, pradedant nuo tam tikro įtempių būvio lygio, Huko dėsnis daugeliui medžiagų yra netenkinamas ir keičiamas netiesiniu ryšiu. Vadinasi, reikia atsisakyti tiesinės teorijos prielaidų ir pereiti prie gerokai platesnių ir sudėtingesnių netiesinės teorijos apibendrinimų. Visų pirma reikia atsisakyti skaičiavimo pagal nedeformuotą būvį, kurį toleruoja maži poslinkiai. Antra, reikia įvertinti konstrukcijos geometrijos pasikeitimo įtaką

jos įtempių ir deformacijų būviui. Trečia, pereiti prie netiesinio įtempių ir deformacijų tarpusavio ryšio ir įvertinti atsirandančias plastines deformacijas. Pastarųjų vaidmuo kai kurių konstrukcinių medžiagų elgsenoje dar iki konstrukcijos plastiškojo suirimo yra didelis: konstrukcija įgauna labai didelius poslinkius ir gali netenkinti normalios eksploatacijos reikalavimų. Naujausieji normatyviniai dokumentai, reglamentuojantys statybinių konstrukcijų projektavimą (Eurocode 3 2006, STR 2.05.08:2005, ANSI/AISC 360-10), vis dažniau įtraukia įvairius netiesinius skaičiavimus. Kaip pavyzdį galima paminėti tai, kad sąvokos „plastinis lankstas“ ar „plastinis darbas“ vis dažniau sutinkamos ne tik teoriniuose vadovėliuose (Икрин, В. А. 2005, Li, G.-Q. *et al.* 2007), bet ir normatyvinę dokumentaciją aiškinančioje literatūroje (Brockenbrough, Merritt 2006, Trahair, N. S. *et al.* 2008, Wong 2009). Taigi šios minėtos priežastys turi būti įvertinamos, sudarant konstrukcijų optimizavimo uždavinių matematinius modelius.

Atliktų darbų analizė leidžia teigti, kad konstrukcijų optimizavimo metodika, kurioje vienu metu taikoma matematinio programavimo teorija, ekstreminiai energiniai principai ir naudojamos medžiagos netampriosios savybės yra viena iš efektyviausių (Čyras *et al.* 2004; Čyras 1983; Kalanta 1997; Karkauskas 1997, 1998; Merkevičiūtė and Atkočiūnas 2003). Čia medžiagos plastiškųjų savybių įvertinimas daug tiksliau parodo konstrukcijos darbą esant įvairiems apkrovimo etapams ir leidžia sukurti gerokai racionalesnį projektą (Atkočiūnas *et al.* 2008; Chen *et al.* 1999; Čyras *et al.* 2004; Kalanta 1997; Karkauskas 1997, 1998, 2004; Merkevičiūtė and Atkočiūnas 2003; Saka and Kameshki 1998; Soh and Chan 2001; Zhang and Lu 1995). Verta pabrėžti, kad dauguma atliktų darbų yra pagrįsti ribinės pusiausvyros teorijos prielaidomis (Chen *et al.* 1999; Čyras *et al.* 2004; Čyras 1983; Soh and Chan 2001; Zhang and Lu 1995). Dėl šios priežasties gauti optimalūs konstrukcijų projektai patenkina tik stiprumo kriterijus, tenkinančius saugos būvį. Būtina pažymėti, kad optimizavimo rezultatai pagal plastiškojo suirimo kriterijų ne visuomet yra lemiami, nes optimalios konstrukcijos ribinis tinkamumo būvis dėl per didelių netampriųjų deformacijų ir jas lydinčių poslinkių atsiradimo gali būti prarastas net ir nepasiekus plastiškos suirties. Be to, optimizavimo uždavinio apribojimų sąlygos dažniausiai yra formuluojamos, neatsižvelgiant į normatyvinės dokumentacijos (Eurocode 3 2006, STR 2.05.08:2005, ANSI/AISC 360-10) reikalavimus ir dėl to optimalios konstrukcijos standumas neužtikrina normalaus jos funkcionavimo. Šios priežastys riboja ribinės pusiausvyros teorijos praktinį taikymą, rengiant optimalius konstrukcijų projektus. Todėl konstrukcijos deformuoto būvio parametrų įvertinimas yra būtinas optimizavimo uždavinių matematiniuose modeliuose. Deformatyvumo apribojimai nusako rėmo mazgų ar atskirų dalių poslinkių ribas, konstrukciniai – minimalius skerspjūvių parametrus, strypų ribinius liaunius bei kitus rodiklius. Nėra abejonių, kad šiandien vienas

svarbiausių optimalaus projektavimo uždavinių yra konstrukcijos optimizavimas, įvertinant visus šiuos reikalavimus ir plieno netampriąsias savybes. Todėl disertacijos orientacija į minėtų faktorių įvertinimą, optimizuojant statybines konstrukcijas šiuo metu yra itin aktualus tiek moksline, tiek eksperimentinės plėtros prasme.

Realizuojant tokią gana sudėtingą matematinio programavimo problemą, kaip optimizavimo uždaviniai su stiprumo ir standumo apribojimais, tenka spręsti neiškilius, netiesinius matematinio programavimo uždavinius. Tai dažniausiai ir nulemia varginantį neiškilių optimizavimo uždavinių praktinio pritaikymo nagrinėjamą, nes šiuo metu matematinio programavimo teorija neturi pakankamai efektyvių ir skaičiavimo prasme patikimų algoritmų, skirtų netiesinių ir neiškilų problemų sprendimui. Tokių uždavinių skaitmeninė realizacija didžiąja dalimi priklauso nuo jų formuluočių specifinių savybių. Egzistuoja keletas galimų kelių jų formulavimui ir sprendimui. Visų pirma galima išskirti įvairius kombinatorinius bei kryptingo perrinkimo metodus, pavyzdžiui, šakų ir ribų metodą (Baušys and Karkauskas 1987); antra – metodus, pagrįstus sprendinio optimalumo kriterijais, kurie, žvelgiant iš matematinio programavimo pozicijų, yra ekvivalentiški iškilo netiesinio programavimo uždavinių Kuno ir Takerio optimalumo sąlygoms (Saka and Hayalioglu 1991). Šakų ir ribų metodo konvergavimas yra teigiamas algoritmo bruožas. Neigiamas – tenka spręsti daugybę tiesinio programavimo uždavinių, kurių skaičius katastrofiškai išauga sudėtingos konstrukcijos atveju. Tokiu būdu šis metodas turi daugiau teorinę nei praktinę taikomąją vertę.

Metodai, pagrįsti Kuno ir Takerio optimalumo sąlygomis, priskiriami netiesioginės optimizacijos metodų grupei. Čia Lagranžo daugiklių metodo pagrindu formaliu matematiniu keliu yra sudaromas Lagranžo funkcionalas pradiniam konstrukcijos optimizavimo uždaviniui. Sudaryto Lagranžo funkcionalo stacionarumo sąlygos yra būtinos apribojimų sąlygos, kurias turi tenkinti optimalus konstrukcijos projektas. Šių sąlygų panaudojimas optimizavimo algoritme yra suvedamas į tam tikrą iteracinę procedūrą.

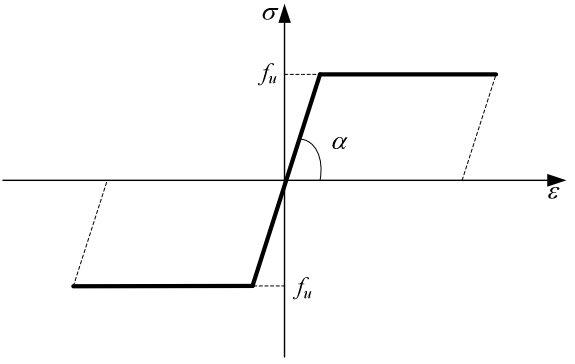
Atliktų darbų analizė parodė konstrukcijų optimizavimo uždavinio matematinio modelio skaičiavimo algoritmo, grindžiamo ekstreminiais energiniais principais (Čyras *et al.* 2004; Čyras 1983; Karkauskas 2007) perspektyvumą ir poreikį ji tobulinti, vertinant konstrukcijų geometriškai netiesinį darbą bei atliekant konstrukcijų analizę naudojant įvairias stiprumo sąlygas. Kaip minėta anksčiau, disertacija orientuota į kompleksinį šių problemų sprendimą.

1.5. Pagrindinės prielaidos ir fizinės priklausomybės

Sudarant konstrukcijos skaičiavimo uždavinių matematinius modelius, paprastai laikomasi tam tikrų geometrinio ir fizikinio pobūdžio prielaidų. Iš vienos pusės

skaičiavimo teorija turi būti paprasta ir pritaikoma praktiškai, o kita vertus ji privalo kaip įmanoma tiksliau atspindėti konstrukcijos, pagamintos iš realių medžiagų, būvį. Realybėje šių dviejų sąlygų vienu metu tinkamai įvykdyti neįmanoma, todėl reikalinga tam tikra konstrukcijos idealizacija. Disertaciniame darbe laikoma, kad:

1. Konstrukcijos medžiaga – idealiai tampriai plastiška, izotropinė. Tokios medžiagos ryšys tarp įtempių σ ir deformacijų ε, apibrėžiamas diagrama, pavaizduota 1.2 paveiksle. Pagal šią schemą tamprioji plastiškoji medžiaga apibūdinama tamprumo moduliu E (tai atitinka pasvirusios diagramos dalies krypties tangentą $E=\tan\alpha$) ir takumo riba f_u. Medžiagos sustiprėjimo ir valkšnumo įtaka disertaciniame darbe neįvertinama. Kaip žinoma, idealus plastiškumas yra pirmasis priartėjimas prie realaus konstrukcijos darbo už tamprumo ribos, o pagal ją suformuluoti metodai, tinka, kai ribinė konstrukcijos būsena yra visiškas stiprumo išnaudojimas.



1.2 pav. Idealiai tamprios plastinės medžiagos diagrama
Fig. 1.2. Ideally elastic plastic material diagram

2. Apkrovos pridėjimas – vienkartinis procesas, apkrova kvazistatinė, t. y. tariama, kad laikui bėgant išorinės apkrovos kitimo greitis pakankamai mažas (apkrova nepriklauso dinaminiam tipui).

3. Deformuojant elementą, jo taškai gali pasislinkti atstumais, gerokai viršijančiais elemento skerspjūvio matmenis, todėl pusiausvyros sąlygos sudaromos deformuotai sistemai, nustačius jos ĮDB paskutiniame iteracinio skaičiavimo žingsnyje, t. y. sprendžiamas geometriškai netiesinis uždavinys.

4. Paties konstrukcijos elemento forma nekinta, t. y. deformacijos lieka mažos.

5. Darbe nagrinėjamas erdvinis strypinis elementas, tad laikoma, kad jame vystosi tempimo-gniuždymo, sukimo bei lenkimo dviejų skerspjūvio ašių atžvilgiu įrąžos.

6. Skerspjūvyje plastinis tekėjimas vyksta visame plote vienu metu. Ribiniai įtempiai pasireiškia visame konstrukcijos elemento skerspjūvio plote. Plastinių deformacijų plitimas skerspjūvio ilgyje nėra nagrinėjamas.

1.6. Pagrindiniai dydžiai, aprašantys konstrukcijos įtemptą deformuotą būvį

Disertaciniame darbe nagrinėjama rėminė konstrukcija savo prigimtimi yra diskretinė. Taigi, sudarant konstrukcijos diskretinį modelį (būtent jam ir nagrinėjamas ĮDB), kiekvieną strypą galima laikyti pavieniu elementu su visuma jam būdingų skaičiuojamųjų dydžių. Manoma, kad kiekviename skaičiuojamajame strypo pjūvyje susidaro tokios įrąžos ir deformacijos: ašinė jėga ir linijinė deformacija susijusi su strypo pailgėjimu, sukimo momentas ir sąsukio kampinė deformacija, lenkimo momentai apie dvi skerspjūvio ašis ir kampinės deformacijos taip pat apie dvi elemento skerspjūvio ašis. Todėl strypinės sistemos diskretinį modelį galima gauti visą konstrukciją išskaidžius į pavienius elementus, esančius tarp konstrukcijos mazgų. Toliau laikysime, kad konstrukcijos diskretinis modelis sudarytas iš baigtinės aibės skaičiuojamųjų baigtinių elementų – strypų, kurių eilinis indeksas žymimas k=1, 2, ..., s (čia s – bendras baigtinių elementų skaičius). Tuomet įrąžų (įtempių) tikrasis būvis bet kuriame skaičiuojamojo elemento k mazge l apibūdinamas n_k-mačiu įrąžų vektoriumi:

$$\mathbf{S}_{kl} \equiv \left[S_{kl,1} \quad S_{kl,2} \quad \ldots \quad S_{kl,n_k} \right]^T, l = 1,2,...,v,$$

čia v – mazgų skaičius k-ajame elemente. Tuomet n-matis vektorius:

$$\mathbf{S} \equiv \left[S_j \right]^T \equiv \left[S_{11} \quad S_{12} \quad \ldots \quad S_{1v} \quad \ldots \quad S_{kl} \quad \ldots \quad S_{sv} \right]^T, j = 1,2,...,n$$

nusako visos konstrukcijos įtempių būvį. Darbe išskiriami tampraus ir plastinio skaičiavimo (liekamieji) dydžiai, todėl šis vektorius yra lygus:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_r,$$

čia $\mathbf{S}_e$ yra tampriųjų įrąžų vektorius, $\mathbf{S}_r$ yra liekamųjų įrąžų vektorius.

Pagal dualią uždavinio formuluotę deformacijos turi būti apibūdinamos tokiu pat n-mačiu vektoriumi:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \left[\varepsilon_j \right]^T \equiv \left[\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{12} \quad \ldots \quad \varepsilon_{1v} \quad \ldots \quad \varepsilon_{kl} \quad \ldots \quad \varepsilon_{sv} \right]^T, j = 1,2,...,n.$$

Šis vektorius yra lygus:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_r,$$

čia $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ yra tampriųjų, o $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ yra liekamųjų deformacijų vektoriai.

Kitą dualią kintamųjų porą sudaro išorinė apkrova ir poslinkiai. Tegul poslinkiai nagrinėjamame skaičiuojamojo elemento mazge apibūdinami m_k-mačiu vektoriumi:

$$\mathbf{u}_{kl} \equiv \left[u_{kl,1} \quad u_{kl,2} \quad \ldots \quad u_{kl,m_k} \right]^T, l = 1,2,\ldots,v.$$

Tuomet apkrova šiame mazge taip pat turi būti apibūdinama tokių pat matmenų vektoriumi:

$$\mathbf{F}_{kl} \equiv \left[F_{kl,1} \quad F_{kl,2} \quad \ldots \quad F_{kl,m_k} \right]^T, l = 1,2,\ldots,v.$$

Diskretiniam konstrukcijos modeliui gaunami du m-mačiai vektoriai:

$$\mathbf{u} \equiv \left[u_j \right]^T \equiv \left[u_{11} \quad u_{12} \quad \ldots \quad u_{1v} \quad \ldots \quad u_{kl} \quad \ldots \quad u_{sv} \right]^T,$$

$$\mathbf{F} \equiv \left[F_j \right]^T \equiv \left[F_{11} \quad F_{12} \quad \ldots \quad F_{1v} \quad \ldots \quad F_{kl} \quad \ldots \quad F_{sv} \right]^T, i = 1,2,\ldots,m.$$

Analogiškai įtempių būviui, vektorius $\mathbf{u}$ skaidomas:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_r,$$

čia $\mathbf{u}_e$ yra tampriųjų, o $\mathbf{u}_r$ yra liekamųjų poslinkių vektorius.

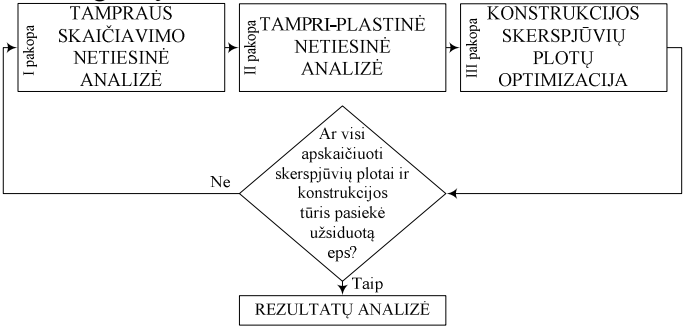
1.7. Konstrukcijų optimizavimo uždavinio matematinis modelis

Šiame disertaciniame darbe nagrinėjamas rėminių konstrukcijų optimizavimo uždavinys yra formuluojamas taip: žinant rėmo konfigūraciją ir išorines jėgas, reikia rasti strypų skerspjūvių plotų A_k pasiskirstymą, tenkinantį minimalaus tūrio konstrukcijos optimalumo kriterijų, kai atskiri konstrukcijos elementai patiria plastiškąsias deformacijas. Nagrinėjamo optimizavimo uždavinio kompleksiniai apribojimai turi apimti, visų pirma, sąlygas, apibūdinančias konstrukcijos tikrąjį ĮDB. Tokios sąlygos yra apibendrinto Lagranžo uždavinio priklausomybės. Antra, standumo sąlygos turi apimti poslinkių apribojimus norimose konstrukcijos vietose tam tikromis t kryptimis: $\mathbf{u}_t^- \le \mathbf{u}_{e,t} + \mathbf{u}_{r,t} \le \mathbf{u}_t^+$. Čia $\mathbf{u}_t^+$ ir $\mathbf{u}_t^-$ – poslinkių viršutinių ir apatinių ribų normatyvinės reikšmės. Be šių būtinų sąlygų gali būti ir kitokio pobūdžio technologiniai ar konstrukciniai apribojimai elementų stabilumui ar ribinių įrąžų apatinei kitimo ribai $\mathbf{S}_0^{\min}$. Tai riboja laisvą konstrukcijos netamprių deformacijų plitimą, todėl optimalių skerspjūvių

konstrukcijos elementuose atsiranda ir tampriosios ir plastiškosios deformacijos, sąlygojamos liekamųjų įrąžų $\mathbf{S}_r$ ir poslinkių $\mathbf{u}_r$. Jei šie stiprumo apribojimai netenkinami kaip lygybės, tai konstrukcija nepasiekia plastiškosios irties (Čyras *et al.* 2004, Karkauskas 2004). Tokiu būdu suformuluoto optimizavimo uždavinio matematinis modelis yra užrašomas taip:

$$
\begin{aligned}
&\text{Rasti} && V\left(A_k\right) \to min, \\
&\text{kai} && \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\left(A_k\right)\right) \le \mathbf{1}, \\
& && \mathbf{A}_n \mathbf{S}_r = \mathbf{F} - \mathbf{A}_n \mathbf{S}_e, \\
& && \mathbf{D}_n \boldsymbol{S}_r - \mathbf{A}_n{}^T \boldsymbol{u}_r + \left[\nabla^T \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\left(A_k\right)\right)\right]\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \\
& && \boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{1} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\left(A_k\right)\right)\right) = \mathbf{0}, \\
& && \mathbf{u}_t^- \le \mathbf{u}_{e,t} + \mathbf{u}_{r,t} \le \mathbf{u}_t^+, \ \mathbf{S}_0\left(A_k\right) \ge \mathbf{S}_0^{min}, \ \boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{0}, \ k = 1, 2, ..., s,
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

čia A_k yra konstrukcijos *k*-osios elementų grupės skerspjūvio plotas; $\mathbf{S}_0$ yra įrąžų ribinių reikšmių vektorius; $\mathbf{D}_\mathrm{n}$ yra $(n \times n)$ matmenų konstrukcijos baigtinių elementų kvazidiagonalioji pasiduodamumo matrica, įvertinanti geometrijos kitimą apkrovimo procese; $\mathbf{A}_n$ yra $(m \times n)$ matmenų pusiausvyros lygčių koeficientų matrica, susieta su diskretinio modelio poslinkiais; n yra nežinomųjų įrąžų skaičius; m yra konstrukcijos laisvumo laipsnis (galimų poslinkių skaičius); $\boldsymbol{\lambda}$ yra Lagranžo daugiklių vektorius.



1.3 pav. Optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmas
Fig. 1.3. The solution algorithm for the optimization problem

Tai netiesinio matematinio programavimo daugiaekstreminis uždavinys. Daugiaekstremališkumas susidaro dėl Kuno ir Takerio papildomumo (matematiniame programavime griežtumo) sąlygos t. y. sandaugos $\boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{1} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\left(A_k\right)\right)\right) = \mathbf{0}$. Šis uždavinys sprendžiamas iteraciniu būdu, ši aplinkybė ir komplikuoja uždavinio skaitinių rezultatų gavimą. Todėl darbe sukurtas originalus konstrukcijų netiesinės optimizacijos algoritmas,

realizuojantis iteracines procedūras pačiame optimizavimo proceso cikle (pats optimizavimo uždavinio ciklas apima tris pakopas). Optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmo bendras schematinis vaizdas yra pateiktas 1.3 paveiksle.

1.8. Optimizavimo uždavinių skaitinis realizavimas

Optimizavimo uždavinių skaitinė realizacija yra tampriai susieta su kompiuterinių technologijų vystymu. Besivystančios kompiuterinės programavimo technologijos suteikė galimybę kurti programinę įrangą, leidžiančią spręsti įvairius optimizavimo uždavinius. Didelį postūmį šioje srityje padarė programavimo kalbos (pavyzdžiui, Fortran – kalba specialiai sukurta mokslinių uždavinių sprendimui). Programos dažniausiai buvo kuriamos dažniausiai vieno žmogaus (programuotojo). Naudojantis programavimo kalba, duomenų įvedimas bei rezultatų pateikimas ir apdorojimas buvo vykdomas pagal griežtas programos kūrėjo nustatytas taisykles ir dažniausiai neturėjo „draugiškos“ vartotojui aplinkos. Tokių programų kūrimo procesas buvo gana sudėtingas bei reikalaujantis didelių žmogiškųjų resursų. Kaip pavyzdį galima paminėti VGTU mokslininkų sukurtas programas (Karkauskas *et al.* 1995) – Atkočiūno „Rutamini“, Kalantos „Simplex“, Karkausko „Kvadpr“, kitų autorių kolektyvų „SM115“, „SM3“, „SM4“ darbo rezultatus ir kitas. Fortran programavimo kalba ir šiandien dažnai naudojama atliekant inžinerinius skaičiavimus (Smith *et al.* 2004).

Be pavienių mokslininkų kuriamų individualių programų, kurios dažniausiai būdavo pritaikytos spręsti gana siaurą spektrą uždavinių, pasaulyje buvo kuriamos bei vystomos matematinių skaičiavimų programos, apjungiančios didelį kiekį matematinių funkcijų, leidžiančių spręsti įvairius uždavinius. Kaip pavyzdį būtų galima pateikti amerikiečių mokslininkų 1970 metų pabaigoje pradėtą kurti kompiuterinę matematinę sistemą bei turinčią tokį pat pavadinimą aukšto lygio mokslinių techninių skaičiavimų kalbą MATLAB (Chapra 2006; Palm 2010; MathWorks 2012; Quarteroni et al. 2010). Šios programos sukūrimo pagrindinė idėja buvo: suteikti vartotojams (studentams) galimybę naudoti įvairias programines bei skaičiavimo bibliotekas be būtinybės mokėti pačią programavimo kalbą. Iš pradžių MATLAB buvo vystoma kaip atviro kodo programinė įranga, bet 1984 metais programos kūrėjai įkūrė kompaniją „The MathWorks“, kuri ir iki šiol rūpinasi šios programos vystymu bei platinimu. Dabar MATLAB yra plačiai vartojama universitetuose ir mokslinių tyrimų centruose. Šiuolaikinės, naujausios šios programos versijos turi „draugišką“ vartotojui aplinką, leidžia atlikti skaičiavimus komandų rėžimu, sprendžiant sudėtingus uždavinius, sukurti bei modifikuoti nuosavas programas. MATLAB, kaip skaičiavimų kalba, turi savo ypatumų, t. y. tam tikrų taisyklių, reikalingų sukurti savo programą ar atlikti skaičiavimus, bet šie ypatumai yra daug

paprastesni palyginus su bet kuria kita programavimo kalba. Kitaip tariant, MATLAB kalba – tai tipinė į problemą orientuota aukšto lygio programavimo kalba. Ji turi operatorius ir funkcijas, kurių realizacija bet kuria programavimo kalba pareikalautų daug laiko. Programavimo kalba MATLAB turi priemonių, kurios leidžia realizuoti įvairias programavimo rūšis: procedūrinį, operatorinį, funkcinį, loginį, struktūrinį, objektinį, vaizdinį. Vaizdinį programavimą padeda realizuoti sistema Simulink, esanti MATLAB branduolyje. Tai leidžia kurti bei vykdyti programas ne tik MATLAB terpėje, bet ir atskiras savarankiškas ir nepriklausomas nuo MATLAB terpės programas. MATLAB, taipogi, gerai pritaikoma atliekant baigtinių elementų skaičiavimus (Asghar Bhatti 2005; Ferreira 2009; Kwon et al. 2000).

Greta paprastų matematinių skaičiavimų funkcijų, MATLAB programa turi daug kompiliuotų funkcijų, įrankių rinkinių-bibliotekų, iš kurių šio darbo kontekste svarbu paminėti dvi:

- Symbolic Math Toolbox – simbolinių skaičiavimų funkcijų biblioteka, leidžianti gauti tangentinių standumo matricų analitines išraiškas, reikalingas tampraus skaičiavimo netiesinei analizei;
- Optimization Toolbox – optimizavimo uždavinių sprendimo funkcijų biblioteka, leidžianti išspręsti įvairaus sudėtingumo bei įvairių rūšių optimizavimo uždavinius.

Sprendžiant įvairius geometriškai netiesinių tamprių plastinių rėmų analizės bei optimizavimo uždavinius gali būti taikoma optimizavimo paprogramė fmincon. Šios paprogramės sprendžiamas matematinio programavimo uždavinys turi turėti tokią matematinio modelio formą:

$$\text{Rasti} \quad \min \mathbf{f}(\mathbf{x})$$
$$\text{kai} \quad \begin{cases} \mathbf{c}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}, \ \mathbf{c}_{eq}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \ \mathbf{A}_{eq}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_{eq}, \\ \mathbf{lb} \le \mathbf{x} \le \mathbf{ub}, \end{cases} \tag{1.8}$$

čia $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ – optimizavimo uždavinio tikslo funkcija; $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ – optimizavimo uždavinio apribojimų sąlygų-nelygybių, išreikštų funkcinėmis priklausomybėmis matrica; $\mathbf{c}_{eq}(\mathbf{x})$ – optimizavimo uždavinio apribojimų sąlygų-lygybių, išreikštų funkcinėmis priklausomybėmis, matrica; $\mathbf{A}$ – optimizavimo uždavinio apribojimų sąlygų-nelygybių, išreikštų tiesinėmis priklausomybėmis, matrica; $\mathbf{b}$ – optimizavimo uždavinio apribojimų sąlygų-nelygybių, išreikštų tiesinėmis priklausomybėmis, laisvųjų narių vektorius; $\mathbf{A}_{eq}$ – optimizavimo uždavinio apribojimų sąlygų-lygybių, išreikštų tiesinėmis priklausomybėmis, matrica; $\mathbf{b}_{eq}$ – optimizavimo uždavinio apribojimų sąlygų-lygybių, išreikštų tiesinėmis

priklausomybėmis, laisvųjų narių vektorius; **lb**, **ub** – optimizavimo uždavinio nežinomųjų vektorius apatinių ir viršutinių ribų vektoriai.

Paprogramė fmincon yra įvairių pasirinkčių, leidžiančių kontroliuoti optimizavimo uždavinio sprendimo eigą. Viena iš svarbiausiųjų pasirinkčių yra galimybė pasirinkti uždavinio sprendimo algoritmą. Paprogramė fmincon sprendžia uždavinius, naudojant active-set; interior-point, sqp ir trust-region-reflective algoritmus, kurie yra plačiai pristatyti mokslinėje literatūroje (Rao 2009, MathWorks Inc. 2012).

Svarbu pažymėti, kad sprendžiant tiesioginius optimizavimo uždavinius MATLAB, programa iš karto pateikia optimizavimo uždavinių dualių formuluočių dydžius.

1.9. Pirmojo skyriaus išvados ir disertacijos uždavinių formulavimas

Mokslinėje literatūroje nėra skirta pakankamai dėmesio geometriškai netiesinių tamprių plastinių statybinių strypinių konstrukcijų skaičiavimo ir optimizavimo, ribojant konstrukcijos poslinkius, problematikai. Svarbiausios išvados:

1. Atlikta analitinė mokslinės literatūros apžvalga parodė tamprių plastinių geometriškai netiesinių strypinių konstrukcijų optimizavimo, ribojant poslinkius, aktualumą (šia tema parašyta nedaug teorinių ir statybos konstrukcijų eksperimentinės plėtros darbų).
2. Optimizavimo uždavinių formuluotės turi būti grindžiamos matematiniu programavimu ir mechanikos ekstreminiais energiniais principais.
3. Optimizavimo metodikai būtina: sudaryti geometriškai netiesinių tamprių plastinių statybinių strypinių konstrukcijų skaičiavimo ir optimizavimo uždavinių matematinius modelius, ribojant konstrukcijos poslinkius; skaitinei realizacijai sukurti naują iteracinį sprendimo algoritmą.

Remiantis aukščiau pateiktomis išvadomis formuluojami pagrindiniai darbo uždaviniai:

1. Suformuluoti geometriškai netiesinės tamprios plastinės erdvinės strypinės konstrukcijos analizės uždavinio matematinį modelį. Gautus rezultatus palyginti su kitų autorių gautais rezultatais.
2. Plėtoti erdvinio baigtinio elemento tangentinės standumo matricos sudarymo metodiką ir simbolinių skaičiavimų programą šios matricos išraiškai gauti.
3. Suformuluoti ir išspręsti tamprių plastinių geometriškai netiesinių erdvinių strypinių konstrukcijų ribojant poslinkius optimizavimo uždavinį. Atlikti skaitinių eksperimentų lyginamąją analizę.

4. Sujungti antros eilės tampraus skaičiavimo, tamprios plastinės konstrukcijos analizės bei optimizavimo ribojant poslinkius uždavinius į vieną bendrą iteracinį sprendimo algoritmą.
5. Naudojant sukurtą programinę įrangą, modeliavimo būdu patikrinti siūlomo optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmo veiksmingumą ir efektyvumą.

2

Geometriškai netiesinių konstrukcijų analizė

Šiame skyriuje aprašytos pasiūlyto algoritmo du pirmieji skaičiavimo etapai – tampraus skaičiavimo netiesinė analizė bei tamprių plastinių konstrukcijų analizė. Pateikiami šių metodų formulavimai, leidžiantys apskaičiuoti reikalingus dydžius, bei skaitinės realizacijos galimybes. Pagrindžiamas ekstreminio energinio principo taikymas sprendžiant optimizavimo uždavinius. Pateikiami atlikto skaitinio eksperimento rezultatai.

Skyriaus tematika paskelbti šeši straipsniai (Karkauskas, Popov 2009 a; Karkauskas, Popov 2009 b; Popov *et al.* 2010 a, Popov *et al.* 2010 b; Karkauskas, Popov 2011, Popov *et al.* 2013). Rezultatai buvo pristatyti trijose tarptautinėse mokslinėse konferencijose – tarptautinėje mokslinėje konferencijoje „*Modern building materials, structures and techniques*“ 2010 m. Vilniuje; „*Optimization and Analysis of Structures*“ 2011 m. Tartu, Estijoje, bei „*Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений“ („Золотовские чтения“)* 2013 m. Maskvoje, Rusijoje bei dviejose jaunųjų mokslininkų konferencijose „*Mokslas – Lietuvos ateitis*“ 2009 ir 2012 m. Vilniuje.

2.1. Konstrukcijos tangentinė standumo matrica

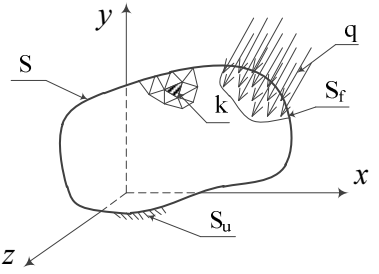
Reali konstrukcija turi begalinį laisvės laipsnį. Sprendžiant konstrukcijos analizės bei optimizavimo uždavinius tenka naudotis skaitinio modeliavimo metodais. Tam reikia pereiti nuo begalinio konstrukcijos laisvės laipsnio prie baigtinio laisvės laipsnio. Tai realizuojama diskretizacijos procesu, kurio rezultatas yra konstrukcijos diskretinis modelis. Šį procesą galima atlikti baigtinių elementų, kraštinių elementų, baigtinių skirtumų metodais (Секулович 1993;Reddy 2004; Reddy 2005; Zienkiewicz and Taylor 2005; Wriggers 2008).

Baigtinių elementų metodas (BEM) buvo kuriamas tamprumo ir plastiškumo teorijų bei statybinės mechanikos lygtims spręsti. Šiuo metu šiuolaikinėse statybinių konstrukcijų analizės ir projektavimo programose BEM tapo standartiniu.

Optimizavimo uždavinio (1.7) sprendimo siūlomo algoritmo tampraus skaičiavimo netiesinės analizės uždavinys sprendžiamas naudojant baigtinių elementų tangentinio standumo metodo (Barauskas 1998, Barauskas *et al.* 2004) pusiausvyros lygtį:

$$\mathbf{K}_{\tau}\mathbf{u}_{e} = \mathbf{F}, \tag{2.1}$$

čia $\mathbf{K}_{\tau}=\mathbf{K}_{e}+\mathbf{K}_{g}+\mathbf{K}_{u}$ – konstrukcijos tangentinė standumo matrica; $\mathbf{K}_{e}$ – konstrukcijos mažų poslinkių (tampraus skaičiavimo) standumo matrica; $\mathbf{K}_{g}$ – konstrukcijos geometrinė standumo matrica, įvertinanti konstrukcijos deformuoto būvio įtaką jos standumui; $\mathbf{K}_{u}$ – konstrukcijos pradinių poslinkių standumo matrica.



2.1 pav. Kūnas ir jo diskretizavimas baigtiniais elementais
Fig. 2.1. A body and it‘s discretization by finite elements

Žemiau pateikiama detali konstrukcijos tangentinės standumo matricos sudarymo eiga BEM. Šios matricos sudarymui bus naudojamas variacinis metodas, grindžiamas pilnutinės diskretizuoto kūno potencinės energijos Π stacionarumo sąlyga (Atkočiūnas *et al.* 2004, Barauskas *et al.* 2004), tiksliau sakant pirmoji funkcionalo Π variacija, kuri yra lygi nuliui:

$$\partial \Pi = 0. \tag{2.2}$$

Nagrinėjamas kūnas, kurio tūris V yra apribotas uždaru paviršiumi S. Kūnas yra suskaidomas į baigtinį skaičių elementų k, kaip pavaizduota 2.1 paveiksle. Išorinės jėgos, veikiančios elemento taškus, yra paskirstytos tūrinės jėgos $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \left[g_x(x,y,z) \quad g_y(x,y,z) \quad g_z(x,y,z) \right]^T$, paviršiaus S dalyje S_f veikiančios paviršinės paskirstytos jėgos $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \left[q_x(x,y,z) \quad q_y(x,y,z) \quad q_z(x,y,z) \right]^T$ ir elementų tarpusavio sąveikos mazginės jėgos $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left[F_x(x,y,z) \quad F_y(x,y,z) \quad F_z(x,y,z) \right]^T$. Kūno paviršiaus dalyje S_u baigtinių elementų bet kurio taško poslinkiai $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left[u_x(x,y,z) \quad u_y(x,y,z) \quad u_z(x,y,z) \right]^T$ yra apriboti, t. y. $\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ paviršiuje S_u. Taigi, šiame paviršiuje elemento taškus veikia reakcijos $\mathbf{r}(\mathbf{x})$.

Tamprumo teorijos uždaviniuose pilnutinė diskretizuoto kūno potencinė energija aprašoma išraiška:

$$\Pi = U + \Omega, \tag{2.3}$$

čia U – potencinė kūno deformavimo energija (vidinių jėgų potencialas); Ω – potencinė išorinių jėgų energija (išorinių jėgų potencialas).

Potencinę kūno deformavimo energiją nulemia paskirų baigtinių elementų potencinė deformavimo energija, t. y.:

$$U = \sum_{k=1}^{s} U_k, \tag{2.4}$$

čia s – baigtinių elementų skaičius; U_k – įtempto ir deformuoto baigtinio elemento potencinė energija, kuri išreiškiama:

$$U_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}) dV_k, \tag{2.5}$$

čia $\boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})$ – k-ojo baigtinio elemento deformacijų vektorius, bet kuriame elemento taške; $\boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x})$ – k-ojo baigtinio elemento įtempių vektorius, bet kuriame elemento taške.

Išorinių jėgų potencialą nulemia išorinių jėgų darbas, atliktas paskirų elementų bet kurio taško poslinkiuose $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left[u_x(x,y,z) \quad u_y(x,y,z) \quad u_z(x,y,z) \right]^T$ ir mazginių taškų poslinkiuose, kurie apibūdinami vektoriumi $\mathbf{u}'_k$:

$$\Omega_k = -\int_{V_k} \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) dV_k - \int_{S_{f,k}} \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{q}(\mathbf{x}) dV_k - \int_{V_k} \mathbf{u}_k'^T \mathbf{F}_k' dV_k, \tag{2.6}$$

čia $\mathbf{u}_k'$ – k-ojo baigtinio elemento mazginių poslinkių vektorius; $\mathbf{F}_k'$ – k-ojo baigtinio elemento mazginių jėgų vektorius.

Diskretizuoto kūno elemento pilnutinė potencinė energija Π bus gauta susumavus paskirų baigtinių elementų vidinių ir išorinių jėgų potencialus (2.5) ir (2.6). Tuomet gaunama tokia pilnutinės potencinės energijos išraiška:

$$\begin{aligned} \Pi_k = \frac{1}{2}\int_{V_k} \boldsymbol{\varepsilon}_k\left(\mathbf{x}\right)^T \boldsymbol{\sigma}_k\left(\mathbf{x}\right) dV_k - \\ \int_{V_k} \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) dV_k - \int_{S_{f,k}} \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{q}(\mathbf{x}) dV_k - \int_{V_k} \mathbf{u}_k'^T \mathbf{F}_k' dV_k. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Naudojantis pilnutinės potencinės energijos stacionarumo sąlygomis (Lagranžo variaciniu principu), gaunamos baigtinio elemento pusiausvyros lygtys, parašytos remiantis mazginiais poslinkiais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_k}{\partial \mathbf{u}_k'} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_k'}\left(\frac{1}{2}\int_{V_k} \boldsymbol{\varepsilon}_k\left(\mathbf{x}\right)^T \boldsymbol{\sigma}_k\left(\mathbf{x}\right) dV_k\right) - \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_k'}\left(\int_{V_k} \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) dV_k + \int_{S_{f,k}} \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{q}(\mathbf{x}) dV_k + \int_{V_k} \mathbf{u}_k'^T \mathbf{F}_k' dV_k\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ši lygtis yra baigtinio elemento pusiausvyros netiesinė lygtis, nes ir įtempių funkcija $\boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x})$ taip pat yra išreiškiama poslinkiais $\mathbf{u}_k'$. Šią lygtį galime užrašyti taip:

$$\boldsymbol{\Psi}_k\left(\mathbf{u}_k'\right) - \mathbf{F}_{g,k} - \mathbf{F}_{q,k} - \mathbf{F}_k' = 0, \tag{2.9}$$

čia $\mathbf{F}_{g,k}$ – k-ojo baigtinio elemento mazginių jėgų vektorius, sąlygotas paskirstytųjų tūrinių jėgų; $\mathbf{F}_{q,k}$ – k-ojo baigtinio elemento mazginių jėgų vektorius, sąlygotas paskirstytųjų paviršinių jėgų;

$$\boldsymbol{\Psi}_k\left(\mathbf{u}_k'\right) = \int_{V_k} \left\{\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k\left(\mathbf{x}\right)}{\partial \mathbf{u}_k'}\right\}^T \boldsymbol{\sigma}_k\left(\mathbf{x}\right) dV_k, \tag{2.10}$$

o jo išvestinė:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_k\left(\mathbf{u}'_k\right)}{\partial \mathbf{u}'_k} = \mathbf{k}_\tau\left(\mathbf{u}'_k\right), \tag{2.11}$$

yra vadinama baigtinio elemento tangentine standumo matrica. Matome, kad elemento tangentinės standumo matricos fizinė prasmė yra netiesinės elemento pusiausvyros lygties (2.8) pirmasis dėmuo – Jakobio matrica, apskaičiuota esant žinomiems elemento mazginiams poslinkiams $\mathbf{u}'_k$. Reikia pažymėti, kad kvadratinės matricos $\mathbf{k}_\tau\left(\mathbf{u}'_k\right)$ matmuo priklauso nuo elemento mazginių poslinkių vektoriaus $\mathbf{u}'_k$ ilgio. Jos eilutės narius gauname diferencijuojant (2.11) pagal vieną iš vektoriaus $\mathbf{u}'_k$ komponentų:

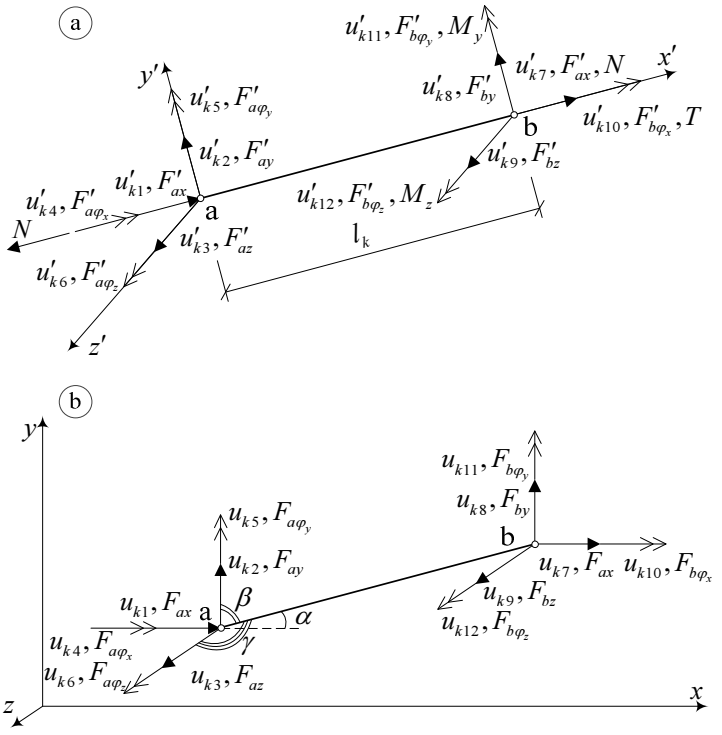
$$\mathbf{k}_\tau\left(\mathbf{u}'_k\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{\Psi}_k\left(\mathbf{u}'_k\right)}{\partial \mathbf{u}'_1} = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{u}'_1}\displaystyle\int_{V_k}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k\left(\mathbf{x}\right)}{\partial \mathbf{u}'_1}\right\}^T \boldsymbol{\sigma}_k\left(\mathbf{x}\right)dV_k \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\Psi}_k\left(\mathbf{u}'_k\right)}{\partial \mathbf{u}'_2} = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{u}'_2}\displaystyle\int_{V_k}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k\left(\mathbf{x}\right)}{\partial \mathbf{u}'_2}\right\}^T \boldsymbol{\sigma}_k\left(\mathbf{x}\right)dV_k \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\Psi}_k\left(\mathbf{u}'_k\right)}{\partial \mathbf{u}'_3} = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{u}'_3}\displaystyle\int_{V_k}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k\left(\mathbf{x}\right)}{\partial \mathbf{u}'_3}\right\}^T \boldsymbol{\sigma}_k\left(\mathbf{x}\right)dV_k \\ \cdots \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\Psi}_k\left(\mathbf{u}'_k\right)}{\partial \mathbf{u}'_n} = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{u}'_n}\displaystyle\int_{V_k}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k\left(\mathbf{x}\right)}{\partial \mathbf{u}'_n}\right\}^T \boldsymbol{\sigma}_k\left(\mathbf{x}\right)dV_k \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Geometriniai netiesiškumai yra sąlygoti netiesinės poslinkių ir deformacijų priklausomybės. Vadinasi, šios matricos (2.12) reikšmė netiesiogiai priklauso nuo mazginių poslinkių $\mathbf{u}'_k$. Nuo jų priklauso deformacijų $\boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})$ reikšmės, o nuo deformacijų priklauso įtempių $\boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x})$ reikšmės.

2.2. Rėminis strypinis erdvinis elementas

2.2.1. Elemento formos funkcijos

Šiame darbe pristatoma nagrinėjamo erdvinės rėminės konstrukcijos elemento (2.2 pav.) tangentinės standumo matricos sudarymo metodika.



2.2 pav. Erdvinis rėminis baigtinis elementas
Fig. 2.2. The three-dimensional frame finite element

Tempiamo-gniuždomo, sukamo bei kartu lenkiamo elemento mazginių poslinkių vektorius lokaliojoje koordinačių sistemoje, bus parašomas elemento galų išilginiais, skersiniais ir kampiniais poslinkiais (2.2 pav., a):

$$\mathbf{u}'_k = \left[u'_{k1} \quad u'_{k2} \quad u'_{k3} \quad u'_{k4} \quad u'_{k5} \quad u'_{k6} \quad u'_{k7} \quad u'_{k8} \quad u'_{k9} \quad u'_{k10} \quad u'_{k11} \quad u'_{k12}\right]^T. \tag{2.13}$$

Šio vektoriaus komponentai u'_{k1} ir u'_{k7} yra elemento mazginių taškų linijiniai poslinkiai, kurie sutampa su elemento lokalios ašies x' kryptimi. Komponentai u'_{k2} ir u'_{k8} yra linijiniai poslinkiai elemento lokalios ašies y' kryptimi. Komponentai u'_{k3} ir u'_{k9} yra linijiniai poslinkiai elemento lokalios ašies z' kryptimi. Komponentai u'_{k4} ir u'_{k10} yra kampiniai sukimo poslinkiai apie elemento lokaliąją ašį x', kurių kryptys sutampa su laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi žiūrint iš teigiamos ašies pusės. Komponentai u'_{k5} ir u'_{k11} yra kampiniai elemento posūkiai apie lokaliąją ašį y', kurių kryptis sutampa su laikrodžio

rodyklės judėjimo kryptimi žiūrint iš teigiamos ašies pusės. Komponentai u'_{k6} ir u'_{k12} yra kampiniai posūkiai apie elemento lokaliąją ašį z', kurių kryptis sutampa su laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi žiūrint iš teigiamos ašies pusės. Taigi erdvinės rėminės konstrukcijos elementas lokaliojoje koordinačių sistemoje $x'y'z'$ turi dvylika laisvumo laipsnių. Tokio elemento bet kurio taško linijinis poslinkis elemento lokalios ašies x' kryptimi (elemento pailgėjimas ar sutrumpėjimas) bei sukimas apie šią ašį yra apibrėžiami tiesinėmis funkcijomis $u'_{kx}(x)$ ir $\varphi'_{kx}(x)$, o linijiniai poslinkiai elemento lokalių ašių y' ir z' kryptimis – netiesinėmis funkcijomis $u'_{ky}(x)$ ir $u'_{ky}(x)$. Šių funkcijų aproksimacijai dažniausiai naudojami Ermito polinomai (Barauskas, R. 1998, Barauskas, R. *et al.* 2004). Ermito polinomus, jų nežinant, bet kurio taško poslinkių funkcijų interpoliavimui per elemento mazginius taškus, galima gauti interpoliacines funkcijas parenkant tam tikro polinomo pavidalu.

Laikoma, kad strypų tempimo-gniuždymo bei sukimo poslinkių funkcijos aproksimuojamos tiesiniais polinomais:

$$u'_{kx}(x) = a_0 + a_1 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}, \tag{2.14}$$

$$\varphi'_{kx}(x) = d_0 + d_1 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{Bmatrix}. \tag{2.15}$$

Strypo poslinkių y' ir z' ašių kryptimis aproksimuojančios funkcijos yra kubiniai polinomai:

$$u'_{ky}(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}, \tag{2.16}$$

$$u'_{kz}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}. \tag{2.17}$$

Surašius (2.14)–(2.15) lygtis į bendrą lygčių sistemą ir užrašius matricine forma gaunama:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_0 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{Pa}. \tag{2.18}$$

Šių (2.14)–(2.15) poslinkių funkcijų interpoliacijos taškai yra mazginiai taškai x=0 ir $x=l_k$. Šiuose taškuose yra duotos ne tik įlinkių funkcijos (2.16)–(2.17), bet ir šių funkcijų pirmosios išvestinės (kampiniai poslinkiai):

$$\varphi'_{ky}(x) = -\frac{du'_{ky}(x)}{dx} = -\left(b_1 + b_2 x + b_3 x^2\right), \tag{2.19}$$

$$\varphi'_{kz}(x) = -\frac{du'_{kz}(x)}{dx} = -\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right). \tag{2.20}$$

Įrašę į funkcijas (2.14)–(2.17) ir (2.19)–(2.20) elemento mazginių taškų koordinates, gauname tokia lygčių sistemą:

$$\left.\begin{aligned} &u'_{kx}(x=0) = u'_{k1} = a_0,\ u'_{ky}(x=0) = u'_{k2} = b_0, \\ &u'_{kz}(x=0) = u'_{k3} = c_0,\ \varphi'_{kx}(x=0) = u'_{k4} = d_0, \\ &\varphi'_{ky}(x=0) = u'_{k5} = -b_1,\ \varphi'_{kz}(x=0) = u'_{k6} = -c_1, \\ &u'_{kx}(x=l_k) = u'_{k7} = a_0 + a_1 l_k,\ u'_{ky}(x=l_k) = u'_{k8} = b_0 + b_1 l_k + b_2 l_k^2 + b_3 l_k^3, \\ &u'_{kz}(x=l_k) = u'_{k9} = c_0 + c_1 l_k + c_2 l_k^2 + c_3 l_k^3,\ \varphi'_{kx}(x=l_k) = u'_{k10} = d_0 + d_1 l_k, \\ &\varphi'_{ky}(x=l_k) = u'_{k11} = -b_1 - 2b_2 l_k - 3b_3 l_k^2, \\ &\varphi'_{kz}(x=l_k) = u'_{k12} = -c_1 - 2c_2 l_k - 3c_3 l_k^2. \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

Lygybių sistema (2.21) matricine-vektorine forma yra užrašoma taip:

$$\begin{Bmatrix} u'_{k1} \\ u'_{k2} \\ u'_{k3} \\ u'_{k4} \\ u'_{k5} \\ u'_{k6} \\ u'_{k7} \\ u'_{k8} \\ u'_{k9} \\ u'_{k10} \\ u'_{k11} \\ u'_{k12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_k & l_k^2 & l_k^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_k & l_k^2 & l_k^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_k \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2l_k & -3l_k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2l_k & -3l_k^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_0 \\ d_1 \end{Bmatrix},$$

arba trumpiau:

$$\mathbf{u}'_k = \mathbf{C}\mathbf{a}. \tag{2.22}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname polinomų koeficientų išraiškas per elemento mazginių taškų poslinkius:

$$a_0 = u'_{k1},\ a_1 = -\frac{1}{l}u'_{k1} + \frac{1}{l}u'_{k7},\ b_0 = u'_{k2},\ b_1 = -u'_{k5},$$

$$b_2 = -\frac{3}{l^2}u'_{k2} + \frac{2}{l}u'_{k5} + \frac{3}{l^2}u'_{k8} + \frac{1}{l}u'_{k11},\ b_3 = \frac{2}{l^3}u'_{k2} - \frac{1}{l^2}u'_{k5} - \frac{2}{l^3}u'_{k8} - \frac{1}{l^2}u'_{k11},$$

$$c_0 = u'_{k3},\ c_1 = -u'_{k6},\ c_2 = -\frac{3}{l^2}u'_{k3} + \frac{2}{l}u'_{k6} + \frac{3}{l^2}u'_{k9} + \frac{1}{l}u'_{k12},$$

$$c_3 = \frac{2}{l^3}u'_{k3} - \frac{1}{l^2}u'_{k6} - \frac{2}{l^3}u'_{k9} - \frac{1}{l^2}u'_{k12},\ d_0 = u'_{k4},\ d_1 = -\frac{1}{l}u'_{k4} + \frac{1}{l}u'_{k10}.$$

Užrašę matricine forma, gauname:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_0 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{l_k^2} & 0 & 0 & \frac{2}{l_k} & 0 & 0 & \frac{3}{l_k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{l_k} & 0 \\ 0 & \frac{2}{l_k^3} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_k^2} & 0 & 0 & -\frac{2}{l_k^3} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_k^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{l_k^2} & 0 & 0 & \frac{2}{l_k} & 0 & 0 & \frac{3}{l_k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{l_k} \\ 0 & 0 & \frac{2}{l_k^3} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_k^2} & 0 & 0 & -\frac{2}{l_k^3} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_k^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{l_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l_k} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{k1} \\ u'_{k2} \\ u'_{k3} \\ u'_{k4} \\ u'_{k5} \\ u'_{k6} \\ u'_{k7} \\ u'_{k8} \\ u'_{k9} \\ u'_{k10} \\ u'_{k11} \\ u'_{k12} \end{Bmatrix}.$$

Šias polinomų koeficientų išraiškas įstatę į (2.14)–(2.17) gauname elemento bet kurio taško linijinio poslinkio, sukimo ar įlinkio išraišką per šio elemento mazginių taškų poslinkius:

$$u'_{kx}(x) = u'_{k1} + \left(-\frac{1}{l_k} u'_{k1} + \frac{1}{l_k} u'_{k7} \right) x, \tag{2.23}$$

$$\varphi'_{kx}(x) = u'_{k4} + \left(-\frac{1}{l_k} u'_{k4} + \frac{1}{l_k} u'_{k10} \right) x, \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} u'_{ky}(x) = u'_{k2} + \left(-u'_{k5}\right) x + \left(-\frac{3}{l_k^2} u'_{k2} + \frac{2}{l_k} u'_{k5} + \frac{3}{l_k^2} u'_{k8} + \frac{1}{l_k} u'_{k11} \right) x^2 + \\ \left(\frac{2}{l_k^3} u'_{k2} - \frac{1}{l_k^2} u'_{k5} - \frac{2}{l_k^3} u'_{k8} - \frac{1}{l_k^2} u'_{k11} \right) x^3, \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$u'_{kz}(x)=u'_{k3}+\left(-u'_{k6}\right)x+\left(-\frac{3}{l_k^2}u'_{k3}+\frac{2}{l_k}u'_{k6}+\frac{3}{l_k^2}u'_{k9}+\frac{1}{l_k}u'_{k12}\right)x^2+\left(\frac{2}{l_k^3}u'_{k3}-\frac{1}{l_k^2}u'_{k6}-\frac{2}{l_k^3}u'_{k9}-\frac{1}{l_k^2}u'_{k12}\right)x^3. \tag{2.26}$$

Sutraukus panašius narius gauname:

$$u'_{kx}(x)=\left(1-\frac{x}{l_k}\right)u'_{k1}+\frac{x}{l_k}u'_{k7}, \tag{2.27}$$

$$\varphi'_{kx}(x)=\left(1-\frac{x}{l_k}\right)u'_{k4}+\frac{x}{l_k}u'_{k10}, \tag{2.28}$$

$$u'_{ky}(x)=\left(\frac{2x^3}{l_k^3}-\frac{3x^2}{l_k^2}+1\right)u'_{k2}+\left(-\frac{3x^3}{l_k^3}+\frac{2x^2}{l_k}-x\right)u'_{k5}+\left(-\frac{2x^3}{l_k^3}+\frac{3x^2}{l_k^2}\right)u'_{k8}+\left(-\frac{x^3}{l_k^2}+\frac{x^2}{l_k}\right)u'_{k11}, \tag{2.29}$$

$$u'_{kz}(x)=\left(\frac{2x^3}{l_k^3}-\frac{3x^2}{l_k^2}+1\right)u'_{k3}+\left(-\frac{3x^3}{l_k^3}+\frac{2x^2}{l_k}-x\right)u'_{k6}+\left(-\frac{2x^3}{l_k^3}+\frac{3x^2}{l_k^2}\right)u'_{k9}+\left(-\frac{x^3}{l_k^2}+\frac{x^2}{l_k}\right)u'_{k12}. \tag{2.30}$$

Tokiu būdu, elemento bet kurio taško poslinkių vektorius $\mathbf{u}_k(x)=\left[u'_x(x)\quad u'_y(x)\quad u'_z(x)\quad \varphi'_x(x)\right]^T$, įvertinus aukščiau vartotus žymėjimus, yra išreiškiamas elemento mazginiais poslinkiais ir užrašomas taip:

$$\mathbf{u}_k(x)=\mathbf{P}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}'_k=\mathbf{N}_k(x)\mathbf{u}'_k, \tag{2.31}$$

čia $\mathbf{N}_k(x)=\left[N_1\quad N_2\right]$, kur

$$N_1=\begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & N_3(x) & 0 & 0 & 0 & N_4(x)\\ 0 & 0 & N_3(x) & 0 & N_5(x) & 0\\ 0 & 0 & 0 & N_1(x) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} N_2(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_6(x) & 0 & 0 & 0 & N_7(x) \\ 0 & 0 & N_6(x) & 0 & N_8(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2(x) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

yra vadinama elemento formos funkcijų matrica, kurios nariai yra Ermito polinomai:

$$\left.\begin{aligned} &N_1(x) = 1 - \frac{x}{l_k},\ N_2(x) = \frac{x}{l_k}, \\ &N_3(x) = 1 - \frac{3}{l_k^2}x^2 + \frac{2}{l_k^3}x^3,\ N_4(x) = x - \frac{2}{l_k}x^2 + \frac{1}{l_k^2}x^3, \\ &N_5(x) = -x + \frac{2}{l_k}x^2 - \frac{1}{l_k^2}x^3,\ N_6(x) = \frac{3}{l_k^2}x^2 - \frac{2}{l_k^3}x^3, \\ &N_7(x) = -\frac{1}{l_k}x^2 + \frac{1}{l_k^2}x^3,\ N_8(x) = \frac{1}{l_k}x^2 - \frac{1}{l_k^2}x^3. \end{aligned}\right\} \qquad (2.32)$$

2.2.2. Deformacijų aproksimacija mazginiais poslinkiais

Nagrinėjamas palyginti didelių poslinkių atvejis, kai maksimalių įlinkių ir skerspjūvio charakteringų matmenų (skerspjūvio aukščio h bei pločio b) santykiai tenkina šias ribas: $1/5 \le u_{\max}/h \le 1/5$. Tuomet ryšys tarp deformacijų ir poslinkių yra netiesinis. Monografijoje (Čyras *et al.* 2004) yra išvestos šio ryšio formulės bet kokios formos erdviniam elementui kreivalinijinėje ortogonalioje koordinačių sistemoje. Šios formulės susieja elemento viduriniojo paviršiaus deformacijas su šio paviršiaus taškų poslinkiais. Jas galima panaudoti ir rėminės konstrukcijos elementui, priėmus, kad kreivalinijinės koordinatės sutampa su stačiakampe Dekarto koordinačių sistema, o jas lydinčiosios pirmosios kvadratinės formos koeficientų funkcijos yra lygios 1 bei kreivių spinduliai yra lygūs begalybei. Tuomet strypo ašies išilginė ir skersinė deformacijos:

$$\Delta_x = \frac{\partial u_x'(x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y'(x)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z'(x)}{\partial x}\right)^2, \qquad \theta_x = \frac{\partial \varphi_x'(x)}{\partial x},$$

o kreiviai

$$\kappa_y = \frac{\partial^2 u_z'(x)}{\partial x^2}, \quad \kappa_z = \frac{\partial^2 u_y'(x)}{\partial x^2}.$$

Elemento skerspjūvio bet kurio taško suminė išilginė ir skersinė deformacijos užrašomos taip:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k(x) = \Delta_x - y\kappa_y - z\kappa_z = \frac{\partial u_x'(x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y'(x)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z'(x)}{\partial x}\right)^2 - y\frac{\partial^2 u_z'(x)}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 u_y'(x)}{\partial x^2}, \quad (2.33)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_k(x) = y\theta_x + z\theta_x = y\frac{\partial \varphi_x'(x)}{\partial x} + z\frac{\partial \varphi_x'(x)}{\partial x}, \quad (2.34)$$

čia y ir z – taško atstumai nuo strypo neutralios ašies.

Paprastumo dėlei, nagrinėjamas strypinis elementas, kurio skerspjūvio geometriniai parametrai – plotis b, aukštis h ir ilgis l. Tuomet jo vidinių jėgų vektorius (2.10) yra užrašomas taip:

$$\boldsymbol{\Psi}_k(\mathbf{u}_k') = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l \left\{\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k(x)}{\partial \mathbf{u}_k'}\right\}^T \boldsymbol{\sigma}_k(x)\,dxdydz + \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l \left\{\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_k(x)}{\partial \mathbf{u}_k'}\right\}^T \boldsymbol{\tau}_k(x)\,dxdydz. \quad (2.35)$$

Vidinių jėgų vektorių (2.35) išreiškiame elemento mazgų poslinkiais į deformacijų išraiškas (2.33–2.34) įrašius poslinkių aproksimacijų funkcijas (2.31). Gauname deformacijų funkcijas, išreikštas poslinkiais:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k(x) = \mathbf{C}_0\mathbf{u}_k' + \frac{1}{2}\mathbf{u}_k'^T\mathbf{C}_6(x)\mathbf{u}_k' + \frac{1}{2}\mathbf{u}_k'^T\mathbf{C}_7(x)\mathbf{u}_k' - y\mathbf{C}_5(x)\mathbf{u}_k' - z\mathbf{C}_4(x)\mathbf{u}_k', \quad (2.36)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_k(x) = z\mathbf{C}_3\mathbf{u}_k' + y\mathbf{C}_3\mathbf{u}_k', \quad (2.37)$$

čia $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_4(x) = \frac{\partial \mathbf{C}_1(x)}{\partial x}$, $\mathbf{C}_5(x) = \frac{\partial \mathbf{C}_2(x)}{\partial x}$, $\mathbf{C}_6(x) = \mathbf{C}_1(x)^T\mathbf{C}_1(x)$, $\mathbf{C}_7(x) = \mathbf{C}_2(x)^T\mathbf{C}_2(x)$ yra koeficientų matricos, gaunamos diferencijuojant elemento formos funkcijų matricos $\mathbf{N}_k(x)$ atitinkamas eilutes:

$$\mathbf{C}_0 = \left[-\frac{1}{l_k} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l_k} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right],$$

$$\mathbf{C}_1(x)=\left[0\quad \frac{6x^2}{l_k^3}-\frac{6x}{l_k^2}\quad 0\quad 0\quad 0\quad \frac{3x^2}{l_k^2}-\frac{4x}{l_k}+1\right.$$
$$\left.0\quad \frac{6x}{l_k^2}-\frac{6x^2}{l_k^3}\quad 0\quad 0\quad 0\quad \frac{3x^2}{l_k^2}-\frac{2x}{l_k}\right],$$
$$\mathbf{C}_2(x)=\left[0\quad 0\quad \frac{6x^2}{l_k^3}-\frac{6x}{l_k^2}\quad 0\quad \frac{4x}{l_k}-\frac{3x^2}{l_k^2}-1\quad 0\right.$$
$$\left.0\quad 0\quad \frac{6x}{l_k^2}-\frac{6x^2}{l_k^3}\quad 0\quad \frac{2x}{l_k}-\frac{3x^2}{l_k^2}\quad 0\right],$$
$$\mathbf{C}_3=\left[0\quad 0\quad 0\quad -\frac{1}{l_k}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad \frac{1}{l_k}\quad 0\quad 0\right].$$

2.2.3. Elemento tangentinė standumo matrica

Įrašius (2.36–2.37) išraiškas į (2.35), elemento vidinių jėgų vektorius yra išreiškiamas tokiu būdu:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_k(u)=&\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l \mathbf{C}_0{}^T\boldsymbol{\sigma}_k(x)dxdydz+\\ &\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l \mathbf{C}_6(x)^T\mathbf{u}_k'\boldsymbol{\sigma}_k(x)dxdydz+\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l \mathbf{C}_7(x)^T\mathbf{u}_k'\boldsymbol{\sigma}_k(x)dxdydz-\\ &\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l y\mathbf{C}_5(x)^T\boldsymbol{\sigma}_k(x)dxdydz-\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l z\mathbf{C}_4(x)^T\boldsymbol{\sigma}_k(x)dxdydz+\\ &\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l z\mathbf{C}_3(x)^T\boldsymbol{\tau}_k(x)dxdydz+\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l y\mathbf{C}_3(x)^T\boldsymbol{\tau}_k(x)dxdydz.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Panaudojus gautą vidinių jėgų vektorių, tangentinė standumo matrica (2.11) yra tokia:

$$\mathbf{k}_\tau\left(\mathbf{u}'_k\right)=\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}_k\left(\mathbf{u}'_k\right)}{\partial\mathbf{u}'_k}=$$
$$\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l\mathbf{C}_0{}^T\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_k(x)}{\partial\mathbf{u}'_k}dxdydz+\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l\mathbf{C}_6(x)^T\boldsymbol{\sigma}_k(x)dxdydz+$$
$$\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l\mathbf{C}_6(x)^T\mathbf{u}_k'\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_k(x)}{\partial\mathbf{u}'_k}dxdydz+\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l\mathbf{C}_7(x)^T\boldsymbol{\sigma}_k(x)dxdydz+$$
$$\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l\mathbf{C}_7(x)^T\mathbf{u}_k'\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_k(x)}{\partial\mathbf{u}'_k}dxdydz-\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l y\,\mathbf{C}_5(x)^T\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_k(x)}{\partial\mathbf{u}'_k}dxdydz-$$
$$\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l z\,\mathbf{C}_4(x)^T\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_k(x)}{\partial\mathbf{u}'_k}dxdydz+\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l z\,\mathbf{C}_3(x)^T\frac{\partial\boldsymbol{\tau}_k(x)}{\partial\mathbf{u}'_k}dxdydz+$$
$$\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l y\,\mathbf{C}_3(x)^T\frac{\partial\boldsymbol{\tau}_k(x)}{\partial\mathbf{u}'_k}dxdydz. \tag{2.39}$$

Į Huko dėsnį $\boldsymbol{\sigma}_k(x)=E\boldsymbol{\varepsilon}_k(x)$ ir $\boldsymbol{\tau}_k(x)=G\boldsymbol{\gamma}_k(x)$ įrašę deformacijų išraiškas (2.36–2.37), gauname įtempius mazginiais poslinkiais:

$$\boldsymbol{\sigma}_k(x)=E\,\mathbf{C}_0\mathbf{u}_k'+\frac{1}{2}E\,\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_6(x)\mathbf{u}_k'+\frac{1}{2}E\,\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_7(x)\mathbf{u}_k'-$$
$$yE\,\mathbf{C}_5(x)\mathbf{u}_k'-z\,E\mathbf{C}_4(x)\mathbf{u}_k', \tag{2.40}$$

$$\boldsymbol{\tau}_k(x)=zG\,\mathbf{C}_3\mathbf{u}_k'+y\,G\,\mathbf{C}_3\mathbf{u}_k', \tag{2.41}$$

čia E – medžiagos tamprumo modulis; G – medžiagos šlyties modulis.

Skaičiuojamos įtempių funkcijų (2.40–2.41) išvestines:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_k(x)}{\partial\mathbf{u}_k'}=E\left(\mathbf{C}_0+\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_6(x)+\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_7(x)-y\,\mathbf{C}_5(x)-z\,\mathbf{C}_4(x)\right), \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\tau}_k(x)}{\partial\mathbf{u}_k'}=G\left(z\,\mathbf{C}_3+y\,\mathbf{C}_3\right). \tag{2.43}$$

Įtempius (2.40–2.41) ir jų išvestines (2.42–2.43) įrašę į (2.38) ir atlikę diferencijavimą, gauname elemento tangentinę standumo matricą:

$$\mathbf{k}'_\tau=\mathbf{k}'_e+\mathbf{k}'_g+\mathbf{k}'_u, \tag{2.44}$$

čia

$$\begin{aligned}\mathbf{k}'_e = E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{0}^{l}\Big(&\mathbf{C}_0{}^T\mathbf{C}_0 - z\,\mathbf{C}_0{}^T\mathbf{C}_4(x) - y\,\mathbf{C}_0{}^T\mathbf{C}_5(x) - \\ &z\,\mathbf{C}_4(x)^T\mathbf{C}_0 + z^2\mathbf{C}_4(x)^T\mathbf{C}_4(x) + zy\,\mathbf{C}_4(x)^T\mathbf{C}_5(x) - \\ &y\,\mathbf{C}_5(x)^T\mathbf{C}_0 + zy\,\mathbf{C}_5(x)^T\mathbf{C}_4(x) + y^2\mathbf{C}_5(x)^T\mathbf{C}_5(x)\Big)dxdydz + \\ G\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{0}^{l}&\Big(z^2\mathbf{C}_3{}^T\mathbf{C}_3 - zy\,\mathbf{C}_3{}^T\mathbf{C}_3 + y^2\mathbf{C}_3{}^T\mathbf{C}_3\Big)dxdydz\end{aligned} \tag{2.45}$$

yra elemento mažų poslinkių standumo matrica;

$$\mathbf{k}'_g = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{0}^{l}\Big(\mathbf{C}_6(x)^T + \mathbf{C}_7(x)^T\Big)\boldsymbol{\sigma}_k(x)dxdydz \tag{2.46}$$

yra geometrinė standumo matrica;

$$\begin{aligned}\mathbf{k}'_u = E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{0}^{l}\Big(&0{,}5\mathbf{C}_0{}^T\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_6(x) + 0{,}5\mathbf{C}_0{}^T\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_7(x) + \\ &\mathbf{C}_6(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{C}_0 + 0{,}5\mathbf{C}_6(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_6(x) + \\ &0{,}5\mathbf{C}_6(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_7(x) - z\,\mathbf{C}_6(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{C}_9(x) - \\ &y\,\mathbf{C}_6(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{C}_5(x) + \mathbf{C}_7(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{C}_0 + \\ &0{,}5\mathbf{C}_7(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_6(x) + 0{,}5\mathbf{C}_7(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_7(x) - \\ &z\,\mathbf{C}_7(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{C}_4(x) - y\,\mathbf{C}_7(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{C}_5(x) - \\ &0{,}5z\,\mathbf{C}_4(x)^T\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_6(x) - 0{,}5z\,\mathbf{C}_4(x)^T\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_7(x) - \\ &0{,}5y\,\mathbf{C}_5(x)^T\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_6(x) - 0{,}5y\,\mathbf{C}_5(x)^T\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_7(x)\Big)dxdydz\end{aligned} \tag{2.47}$$

yra pradinių poslinkių standumo matrica.

Į (2.46) įrašius (2.40–2.41) išraiškas, gauname geometrinę standumo matricą išreikštą mazginiais poslinkiais:

$$\mathbf{k}'_g = E \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \Big(\mathbf{C}_6(x)^T \mathbf{C}_0 \mathbf{u}'_k + 0{,}5\mathbf{C}_6(x)^T \mathbf{u}'^T_k \mathbf{C}_6(x) \mathbf{u}'_k + 0{,}5\mathbf{C}_6(x)^T \mathbf{u}'^T_k \mathbf{C}_7(x) \mathbf{u}'_k - z\mathbf{C}_6(x)^T \mathbf{C}_4(x) \mathbf{u}'_k - y\mathbf{C}_6(x)^T \mathbf{C}_5(x) \mathbf{u}'_k + \mathbf{C}_7(x)^T \mathbf{C}_0 \mathbf{u}'_k + 0{,}5\mathbf{C}_7(x)^T \mathbf{u}'^T_k \mathbf{C}_6(x) \mathbf{u}'_k + 0{,}5\mathbf{C}_7(x)^T \mathbf{u}'^T_k \mathbf{C}_7(x) \mathbf{u}'_k - z\mathbf{C}_7(x)^T \mathbf{C}_4(x) \mathbf{u}'_k - y\mathbf{C}_7(x)^T \mathbf{C}_5(x) \mathbf{u}'_k \Big) dxdydz. \tag{2.48}$$

Gautos išraiškos dešiniosios pusės pirmasis ir šeštasis nariai sudaro pastoviąją geometrinės standumo matricos, kurią nulemia tempimo gniuždymo įtempiai, dalį. Antrasis, trečiasis, septintasis ir aštuntasis – kintamąją, apibrėžiančią lenkimo įtempių įtaką elemento standumui, o ketvirtasis, penktasis, devintasis ir dešimtasis nariai – atlikus algebrinius veiksmus ir yra lygūs nuliui.

Erdvinio rėminio elemento tangentinės standumo matricos simbolinė išraiška buvo nustatyta panaudojus kompiuterinio matematinio skaičiavimo komplekso MATLAB simbolinių skaičiavimų paprogramę *Symbolic Math Toolbox*. Komandinės bylos tekstas, sudarytas pagal MATLAB programavimo kalbos dėsningumus, yra pateiktas priede A.

Transformacija iš lokaliųjų komponentų į globaliuosius yra atliekama įprastu keliu. Tam tikslui lokaliojoje koordinačių sistemoje sudarome elemento krypčių kosinusų matricą $\mathbf{T}_{ab}$ ir gauname elemento tangentinę standumo matricą globaliųjų ašių sistemoje:

$$\mathbf{k}_\tau = \mathbf{T}_{ab}^T \cdot \mathbf{k}'_\tau \cdot \mathbf{T}_{ab}, \tag{2.49}$$

čia

$$\mathbf{T}_{ab} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{-\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{\cos\alpha^2 + \cos\gamma^2}} & \sqrt{\cos\alpha^2 + \cos\gamma^2} & \dfrac{-\cos\beta\cos\gamma}{\sqrt{\cos\alpha^2 + \cos\gamma^2}} \\ \dfrac{-\cos\gamma}{\sqrt{\cos\alpha^2 + \cos\gamma^2}} & 0 & \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos\alpha^2 + \cos\gamma^2}} \end{bmatrix}$$

yra krypčių kosinusų matrica bet kuriam erdviniam baigtiniam elementui (Saouma V. E. 2000);

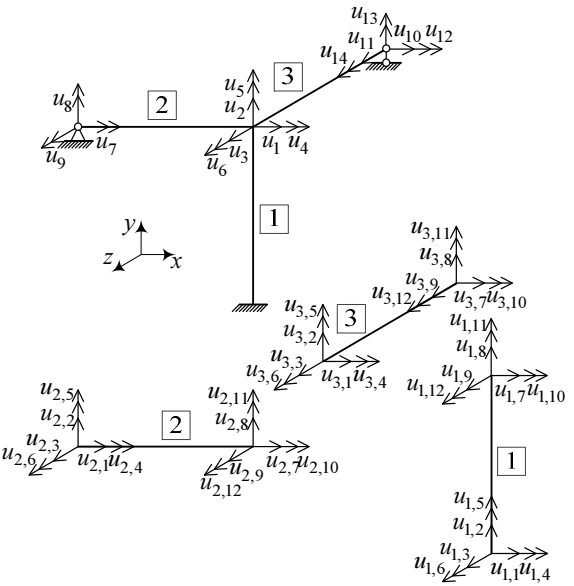
$$\mathbf{T}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\beta & 0 \\ -\cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

yra krypčių kosinusų matrica griežtai vertikaliam erdviniam baigtiniam elementui (Saouma V. E. 2000). Ši matrica yra taikoma vertikaliems elementams pirmos skaičiavimų iteracijos metu; α, β ir γ – kampai tarp lokalios x' ašies ir globaliųjų x, y ir z ašių (2.2 pav. b).

Iš atskirų baigtinių elementų tangentinių standumo matricų formuojama kvazidiagonalinė matrica $\bar{\mathbf{K}}_\tau$ ir apskaičiuojama visos konstrukcijos tangentinė standumo matrica:

$$\mathbf{K}_\tau = \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{K}}_\tau \mathbf{H}, \tag{2.50}$$

čia **H** yra konstrukcijos baigtinių elementų poslinkių ir visos konstrukcijos poslinkių darnos matrica, nusakanti kokie konstrukcijos baigtinių elementų poslinkiai atitinka visos konstrukcijos globaliuosius poslinkius.



2.3 pav. Lokaliųjų rėmo elementų poslinkių schema bei rėminės konstrukcijos poslinkių schema globaliojoje koordinačių sistemoje

Fig. 2.3. Local frame elements displacements schema and frame construction displacements in the global coordinate system

2.1 lentelė. Poslinkių ryšio matrica **H**
Table 2.1. Displacements consistency matrix **H**

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}
$u_{1,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1,3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1,4}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1,5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1,7}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1,8}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1,9}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1,10}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1,11}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1,12}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2,3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2,4}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2,5}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$u_{2,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$u_{2,7}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2,8}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2,9}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2,10}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2,11}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2,12}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3,1}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3,2}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3,3}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3,4}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3,5}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3,6}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$u_{3,8}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3,9}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$u_{3,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$u_{3,11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$u_{3,12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Siekiant geriau suprasti matricos **H** struktūrą, sudaroma diskrečių rėmo elementų lokaliųjų poslinkių schema (2.3 pav.), kurioje lokalieji poslinkiai yra pažymėti $u_{1,1}$, $u_{1,2}$, ..., $u_{3,12}$ (pirmasis skaičius indekse žymi elemento numerį). Jei nagrinėjamo elemento mazginio taško lokalusis poslinkis, pavyzdžiui $u_{1,8}$ sutampa su diskretinio modelio mazgo globaliuoju poslinkiu, šiuo atveju u_2, tai matricos **H** 8 eilutės 2 stulpelyje įrašomas 1, o kituose – 0. Nulinė eilutė reiškia, kad elemento

mazgo taško poslinkis atitinkama kryptimi yra suvaržytas (negalimas). Taip logiškai svarstant, gauta poslinkių ryšio matrica yra pateikta 2.1 lentelėje. Jos viršuje pažymėti globalieji poslinkiai $\mathbf{u} = \left[u_1 \;\; u_2 \;\; \ldots \;\; u_{12} \right]^T$, o lentelės kairėje pusėje – elementų mazgų taškų lokalieji poslinkiai globaliojoje koordinačių sistemoje $\overline{\mathbf{u}} = \left[u_{1,1} \quad u_{1,2} \quad \ldots \quad u_{3,12} \right]^T$.

Visos konstrukcijos tangentinė standumo matrica $\mathbf{K}_\tau$ yra inkorporuojama į prieaugiais užrašytas pusiausvyros lygtis:

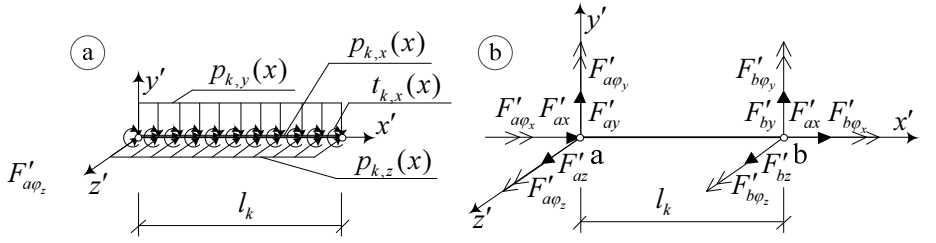
$$\mathbf{K}_\tau \Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{F}, \tag{2.51}$$

čia $\Delta\mathbf{F}$ ir $\Delta\mathbf{u}$ yra visos konstrukcijos mazginės apkrovos prieaugių ir globaliųjų poslinkių prieaugių vektoriai.

2.2.4. Ekvivalentinių apkrovos jėgų apskaičiavimas

Dažniausiai apkrovos yra paskirstytos per visą baigtinio elemento ilgį (2.4 pav. a). Darbe nagrinėjamas erdvinis elementas, kurio veikiančiosios jėgos ar galimi poslinkiai yra sukoncentruoti mazguose (2.2 pav.), tad paskirstytosios apkrovos turi būti pakeistos paprastesnėmis, jas atstojančiomis mazginėmis jėgomis (2.4 pav. b). Šių mazginių jėgų reikšmės yra apskaičiuojamos iš darbų lygybės. Iš tamprumo teorijos (Atkočiūnas, J., Nagevičius, J. 2004) fizikinių dėsnių žinoma, kad konstrukcijai esant pusiausvyroje vidinių jėgų darbas turi būti lygus išorinių jėgų darbui:

$$V'_{k,F} = V'_{k,p}. \tag{2.52}$$



2.4 pav. Erdvinio rėminio elemento apkrovos: a) paskirstytosios apkrovos; b) ekvivalentinės mazginės jėgos

Fig. 2.4. The three-dimensional frame element loads: a) member, distributed loads; b) equivalent nodal forces

Šioje lygybėje vidinių jėgų darbą atlieka ekvivalentiškos mazginės jėgos:

$$V'_{k,F} = \mathbf{u}'^T_k \mathbf{F}'_k, \tag{2.53}$$

čia $\mathbf{u}_k$ yra *k*-ojo baigtinio elemento mazginių poslinkių vektorius globaliojoje koordinačių sistemoje; $\mathbf{F}_k$, yra *k*-ojo baigtinio elemento mazginių jėgų vektorius globaliojoje koordinačių sistemoje.

Išorinių jėgų darbą lygtyje (2.52) aprašo paskirstytųjų apkrovų darbas, aprašomas formule:

$$V_{k,p} = \int_0^{l_k} \mathbf{u}_k\left(x\right)^T \mathbf{p}_k\left(x\right) dx, \tag{2.54}$$

čia $\mathbf{u}_k(x)$ yra *k*-ojo baigtinio elemento bet kurio taško linijinių poslinkių vektorius; $\mathbf{p}_k\left(x\right) = \left[\, p_{k,x}\left(x\right) \quad p_{k,y}\left(x\right) \quad p_{k,z}\left(x\right) \quad t_{k,x}\left(x\right) \right]^T$ yra *k*-ojo baigtinio elemento veikiančiųjų išorinių paskirstytųjų apkrovų vektorius;

Žinant, kad $\mathbf{u}_k\left(x\right) = \mathbf{N}_k(x)\mathbf{u}_k$ lygtį (2.54) galima užrašyti:

$$V_{k,p} = \mathbf{u}_k^T \int_0^{l_k} \mathbf{N}_k\left(x\right)^T \mathbf{p}_k\left(x\right) dx. \tag{2.55}$$

Gautas jėgų išraiškas įrašome į (2.52) išraišką ir gauname:

$$\mathbf{u}_k{}^T \mathbf{F}_k = \mathbf{u}_k^T \int_0^{l_k} \mathbf{N}_k\left(x\right)^T \mathbf{p}_k\left(x\right) dx. \tag{2.56}$$

Sutraukus panašius narius, gauname:

$$\mathbf{F}_k = \int_0^{l_k} \mathbf{N}_k\left(x\right)^T \mathbf{p}_k\left(x\right) dx. \tag{2.57}$$

Laikoma, kad išorinės paskirstytosios apkrovos išlieka pastovios per visą elemento ilgį, t. y. nėra priklausomos nuo *x*. Tokiu būdu vektorinę funkciją $\mathbf{p}_k(x)$ galima užrašyti:

$$\mathbf{p}_k\left(x\right) = \begin{Bmatrix} p_{k,x}\left(x\right) \\ p_{k,y}\left(x\right) \\ p_{k,z}\left(x\right) \\ t_{k,x}\left(x\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{k,x} \\ p_{k,y} \\ p_{k,z} \\ t_{k,x} \end{Bmatrix}. \tag{2.58}$$

Įrašius (2.58), (2.31) ir (2.32) išraiškas į (2.57) bei atlikus atitinkamus skaičiavimus, gaunamos ekvivalentinių mazginių jėgų reikšmės:

$$\mathbf{p}_k\left(x\right)=\left[\begin{array}{cccccccccccc} F_{k,1} & F_{k,2} & F_{k,3} & F_{k,4} & F_{k,5} & F_{k,6} & F_{k,7} & F_{k,8} & F_{k,9} & F_{k,10} & F_{k,11} & F_{k,12}\end{array}\right]^T=$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} \frac{p_{k,x}l_k}{2} & \frac{p_{k,\mathrm{y}}l_k}{2} & \frac{p_{k,z}l_k}{2} & \frac{t_{k,x}l_k}{2} & -\frac{p_{k,z}l_k^2}{12} & \frac{p_{k,\mathrm{y}}l_k^2}{12} \\ & \frac{p_{k,x}l_k}{2} & \frac{p_{k,\mathrm{y}}l_k}{2} & \frac{p_{k,z}l_k}{2} & \frac{t_{k,x}l_k}{2} & \frac{p_{k,z}l_k^2}{12} & -\frac{p_{k,\mathrm{y}}l_k^2}{12}\end{array}\right]^T. \qquad (2.59)$$

Išdėstytasis ekvivalentiškų mazginių jėgų skaičiavimas buvo atliktas pritaikius kompiuterinio matematinio MATLAB skaičiavimo komplekso simbolinių skaičiavimų paprogramę *Symbolic Math Toolbox*. Komandinės bylos tekstas, sudarytas pagal MATLAB programavimo kalbos dėsningumus, yra pateiktas priede B.

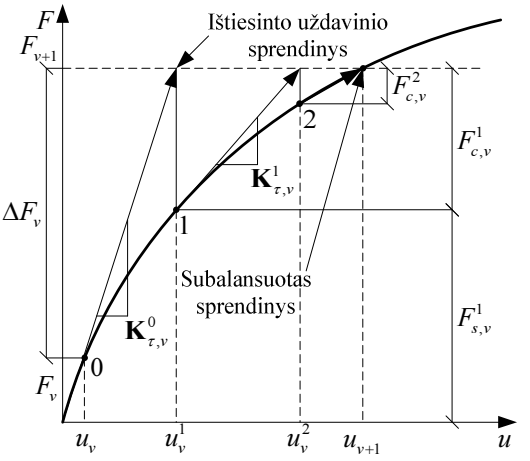
2.3. Tangentinio standumo metodo skaitmeninis realizavimas

Literatūroje yra pateikiami įvairūs netiesinių lygčių sistemos (2.1) sprendimo metodai (Polyanin and Manzhirov 2007; Амосов *et al.* 2008.). Disertaciniame darbe naudojamas Newton-Raphson iteracinis apkrovos kontrolės metodas (Belytscho and Liu 2000; Zienkiewicz *et al.* 2005), kadangi apkrovos-poslinkių kreivė yra iškila funkcija. Be to, verta pažymėti, kad konstrukcijos optimizacija atliekama nepasiekus visiško plastiškojo suirimo. Dėl šios priežasties tangentinė standumo matrica negali būti nuline: $\mathbf{K}_T\neq 0$. Taip pat skaitmeniniais eksperimentais nustatyta, kad Newton-Raphson metodu galutinis rezultatas pasiekiamas per du ar tris apkrovos žingsnius.

Aptarkime Newton-Raphson metodą, kurio principinė schema yra parodyta 2.5 paveiksle. Ten pat yra pateikti konstrukcijos netiesinę elgseną charakterizuojantys dydžiai. Taikant šį metodą, apkrovos vektorius **F** yra skaidomas į dalis ir kiekvieno žingsnio metu didinamas tam tikru prieaugiu ΔF_v (2.5 pav.). Kiekvieno apkrovos prieaugio žingsnyje *v* daromos iteracijos *i* tam, kad eliminuoti nesubalansuotąsias jėgas $F_{c,v}^i$. Jos atsiranda dėl nesubalansuotų mazgo vidinių ir išorinių jėgų (2.5 pav.):

$$\mathbf{F}_{c,v}^i=\mathbf{F}_{v+1}-\mathbf{F}_{s,v}^i, \qquad (2.60)$$

čia $\mathbf{F}_{cv}^i$ – nesubalansuotų mazginių jėgų vektorius *v*-tojo žingsnio *i*-tosios iteracijos gale; $\mathbf{F}_{v+1}$ – mazgo išorinių jėgų vektorius *v*-tojo žingsnio gale; $\mathbf{F}_{s,v}^i$ – mazginių vidinių jėgų vektorius *v*-tojo žingsnio *i*-tosios iteracijos gale.



2.5 pav. Newton-Raphson metodas
Fig. 2.5. The Newton-Raphson method

Šios paklaidos atsiranda ištiesinant uždavinį, t. y. standumo matrica formuojama panaudojant prieš tai buvusios iteracijos metu nustatytas mazgų poslinkių reikšmes.

Žemiau pateikta vieno apkrovos prieaugio (žingsnio) iteracinio skaičiavimo metodika.

Tarkime, kad globaliųjų poslinkių vektorius $\mathbf{u}_v$ ir apkrovos lygis $\mathbf{F}_v$ nagrinėjamo žingsnio v pradžioje yra žinomi. Tuomet v-tojo apkrovos žingsnio metu skaičiavimai atliekami vykdant tokias operacijas:

1. Nustatomas naujo apkrovos lygio vektorius:

$$\mathbf{F}_{v+1} = \mathbf{F}_v + \Delta\mathbf{F}, \tag{2.61}$$

čia $\Delta\mathbf{F}$ – yra apkrovos prieaugių vektorius.

2. Suformuojame v apkrovimo žingsnio i-tosios iteracijos konstrukcijos tangentinę standumo matricą $\mathbf{K}^i_{\tau,v}$ (iš paskirų elementų tangentinių standumo matricų (2.50)) ir nustatome jos determinantą. Jeigu determinantas yra neigiamas, konstatuojame, kad konstrukcija yra geometriškai judri ir baigiame skaičiavimus. Jeigu determinantas yra teigiamas, sudarome prieaugines pusiausvyros lygtis (2.51) nesubalansuotų mazginių jėgų $\mathbf{F}^i_{c,v}$ skaičiavimui (pažymime, kad pirmoje iteracijoje $\mathbf{F}^{i=1}_{c,v} = \Delta\mathbf{F}$):

$$\mathbf{K}^i_{\tau,v}\Delta\mathbf{u}^i_v = \mathbf{F}^i_{c,v}. \tag{2.62}$$

3. Sprendžiame sudarytą tiesinių lygčių sistemą ir gauname vykdomojo v žingsnio i-tos iteracijos globaliųjų poslinkių prieaugių vektorių:

$$\Delta \mathbf{u}_v^i = \left(\mathbf{K}_{\tau,v}^i \right)^{-1} \mathbf{F}_{c,v}^i. \tag{2.63}$$

4. Skaičiuojame naujus globaliuosius mazgų poslinkius. Tam tikslui prie nesubalansuotų mazginių jėgų gautųjų poslinkių prieaugių (2.63) pridedame ankstesnėje iteracijoje gautąsias globaliąsias poslinkių reikšmes:

$$\mathbf{u}_v^i = \Delta \mathbf{u}_v^i + \mathbf{u}_v^{i-1}. \tag{2.64}$$

5. Skaičiuojame naujas mazgų koordinates pagal tokią formulę:

$$\mathbf{x}_v^i = \mathbf{x}_v^{i-1} + \mathbf{u}_v^i. \tag{2.65}$$

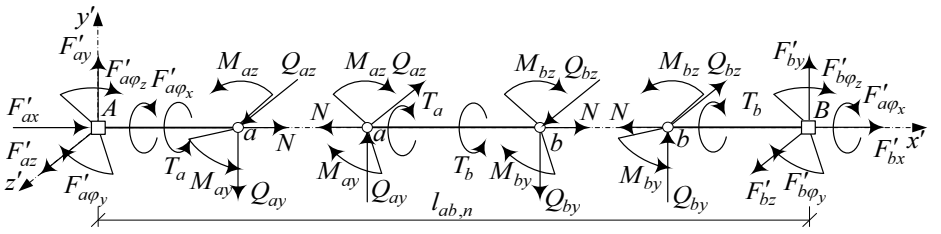
Toliau skaičiuojame naujus elementų ašies pasvirimo krypčių kosinusus ir elementų ilgius $l_{ab,n}$, sudarome elementų koordinačių transformavimo matricas $\mathbf{T}'^{\,i}_{ab,x}$ ir fiktyviąją pusiausvyros lygčių matricą $\overline{\mathbf{A}}_v^i$ iš paskirų baigtinių elementų pusiausvyros lygčių matricų $\mathbf{A}'^{\,i}_{ab,v}$.Tam tikslui užrašome elemento, parodyto 2.2 paveiksle, apkrovos prieaugio v-ojo žingsnio i-tosios iteracijos pusiausvyros lygtis tarp elemento galų ir lokaliųjų mazginių jėgų:

$$\mathbf{A}'^{\,i}_{ab,v} \cdot \mathbf{S}_{ab} = \mathbf{F}'_k, \tag{2.66}$$

čia pusiausvyros lygčių koeficientų matrica yra:

$$\mathbf{A}'^{\,i}_{ab,v} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l_{ab,n} & 0 & 0 & 0 & 1/l_{ab,n} \\ 0 & 0 & -1/l_{ab,n} & 0 & -1/l_{ab,n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_{ab,n} & 0 & 0 & 0 & -1/l_{ab,n} \\ 0 & 0 & 1/l_{ab,n} & 0 & 1/l_{ab,n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.67}$$

Ši matrica gaunama užrašant pusiausvyros sąlygas erdvinio rėminio elemento (2.6 pav.) mazguose.



2.6 pav. Erdvinio rėminio elemento jėgos ir įrąžos
Fig. 2.6. The three-dimensional frame element forces and internal stresses

Pusiausvyros sąlygos mazge „A“:

$$\sum F_{A,x} = 0; \quad F'_{ax} + N = 0; \quad -N = F'_{ax};$$
$$\sum F_{A,y} = 0; \quad F'_{ay} + Q_{ay} = 0; \quad -Q_{ay} = F'_{ay}; \quad M_{az}/l_{ab,n} + M_{bz}/l_{ab,n} = F'_{ay};$$
$$\sum F_{A,z} = 0; \quad F'_{az} - Q_{az} = 0; \quad Q_{az} = F'_{az}; \quad -M_{ay}/l_{ab,n} - M_{by}/l_{ab,n} = F'_{az};$$
$$\sum M_{A,x} = 0; \quad F'_{a\varphi_x} - T_a = 0; \quad T_a = F'_{a\varphi_x};$$
$$\sum M_{A,y} = 0; \quad F'_{a\varphi_y} - M_{ay} = 0; \quad M_{ay} = F'_{a\varphi_y};$$
$$\sum M_{A,z} = 0; \quad F'_{a\varphi_z} - M_{az} = 0; \quad M_{az} = F'_{a\varphi_z}.$$

Pusiausvyros sąlygos mazge „B“:

$$\sum F_{B,x} = 0; \quad F'_{bx} - N = 0; \quad N = F'_{bx};$$
$$\sum F_{B,y} = 0; \quad F'_{by} - Q_{by} = 0; \quad Q_{by} = F'_{by}; \quad -M_{az}/l_{ab,n} - M_{bz}/l_{ab,n} = F'_{by};$$
$$\sum F_{B,z} = 0; \quad F'_{bz} + Q_{bz} = 0; \quad -Q_{bz} = F'_{bz}; \quad M_{ay}/l_{ab,n} + M_{by}/l_{ab,n} = F'_{bz};$$
$$\sum M_{B,x} = 0; \quad F'_{b\varphi_x} + T_b = 0; \quad -T_b = F'_{b\varphi_x};$$
$$\sum M_{B,y} = 0; \quad F'_{b\varphi_y} - M_{by} = 0; \quad M_{by} = F'_{b\varphi_y};$$
$$\sum M_{B,z} = 0; \quad F'_{b\varphi_z} - M_{bz} = 0; \quad M_{bz} = F'_{b\varphi_z}.$$

Užrašius šias pusiausvyros sąlygas, gaunama (2.66) išraiška matricine forma.

6. Nustatome elementų vidinių jėgų prieaugių dydžius ir sudarome elemento globaliųjų vidinių jėgų prieaugių vektorius:

$$\Delta \mathbf{S}^i_{ab} = \mathbf{k}'^{\,i}_{v} \left(\mathbf{A}'^{\,i}_{ab,v} \right)^T \mathbf{T}'^{\,i}_{ab,x} \Delta \mathbf{u}^i_{ab,v}, \tag{2.68}$$

su *v*-ojo žingsnio *i*-tosios iteracijos elemento įrąžų ir deformacijų fizinių lygčių matrica:

$$\mathbf{k}'^{\,i}_{v} = \begin{bmatrix} \frac{EA_{ab}}{l_{ab,n}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_{y,ab}}{l_{ab,n}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{y,ab}}{l_{ab,n}} \\ 0 & 0 & \frac{4EI_{z,ab}}{l_{ab,n}} & 0 & \frac{2EI_{z,ab}}{l_{ab,n}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{t,ab}}{l_{ab,n}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2EI_{z,ab}}{l_{ab,n}} & 0 & \frac{4EI_{z,ab}}{l_{ab,n}} & 0 \\ 0 & \frac{2EI_{y,ab}}{l_{ab,n}} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{y,ab}}{l_{ab,n}} \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

Sudarome globaliųjų vidinių jėgų prieaugių vektorių: $\Delta\mathbf{S}^i_v = \left[\Delta\mathbf{S}^i_{1,v} \;\; \Delta\mathbf{S}^i_{2,v} \;\; \ldots \Delta\mathbf{S}^i_{ab,v} \;\; \ldots \Delta\mathbf{S}^i_{s,v}\right]^T$.

7. Skaičiuojame konstrukcijos elementų vidinių mazginių jėgų prieaugius: $\Delta\overline{\mathbf{F}}^i_{s,v} = \overline{\mathbf{A}}^i_v \Delta\mathbf{S}^i_v$.

8. Nustatome globalųjį mazginių jėgų prieaugių vektorių:

$$\Delta\mathbf{F}^i_{s,v} = \mathbf{H}^T \Delta\overline{\mathbf{F}}^i_{s,v}. \quad (2.70)$$

9. Skaičiuojame *v* apkrovos prieaugio žingsnio *i*-tosios iteracijos pabaigos sumines elementų mazgines jėgas ir įrąžas:

$$\mathbf{F}^i_{s,v} = \mathbf{F}^{i-1}_{s,v} + \Delta\mathbf{F}^i_{s,v}, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{S}^i_v = \mathbf{S}^{i-1}_v + \Delta\mathbf{S}^i_v. \quad (2.72)$$

10. Skaičiuojame nesubalansuotas (kompensacines) mazgines jėgas (2.60).

11. Tikriname pasirinkto tikslumo konvergencijos sąlygą:

$$\mathbf{F}^i_{c,v} - \mathbf{F}^{i-1}_{c,v} \le \text{eps?} \quad (2.73)$$

Jei ši sąlyga netenkinama, toliau vykdome žingsninį skaičiavimą, t. y. kartojame skaičiavimus aprašytus 1 – 10 operacijose.

Iteracinis ciklas baigiamas, kai nesubalansuotų jėgų vektorius $\mathbf{F}_{c,v}$ yra labai mažas arba, kai tenkinamas pasirinktas tikslumas $\mathbf{F}^i_{c,v} - \mathbf{F}^{i-1}_{c,v} \le \text{eps}$? Po to

gauname konstrukcijos deformuoto būvio visus reikalingus parametrus ir pusiausvyros lygčių koeficientų matricą $\mathbf{A}_n = \mathbf{H}\bar{\mathbf{A}}_v$, atitinkančią tam tikrą apkrovos lygį **F**.

Aukščiau aprašytas skaičiavimas algoritmo pavidalu yra pateiktas 2.7 paveiksle.

2.4. Liekamųjų įrąžų analizės uždavinys

Tampriosios plastinės sistemos liekamųjų įrąžų tikrajam būviui rasti (Čyras 1983; Atkočiūnas et al. 2010) naudojamas ekstreminis energinis principas: iš visų statiškai leistinų liekamųjų įrąžų vektorių sistemoje, kuri visiškai plastiškai nesuiro, tikrasis yra tas, kuris atitinka minimalią papildomo deformavimo energiją.

Papildomo deformavimo energija yra išreiškiama liekamųjų įrąžų kvadratine forma (Atkočiūnas *et al.* 2010):

$$U_r = \frac{1}{2}\mathbf{S}_r^T \mathbf{D}_n \mathbf{S}_r. \tag{2.74}$$

Svarbu pažymėti, kad kai konstrukciją veikia vienkartinė apkrova, statiškai leistinų liekamųjų įrąžų vektorius yra toks, kuris atitinka statikos lygtis:

$$\mathbf{A}_n \mathbf{S}_r = \mathbf{F} - \mathbf{A}_n \mathbf{S}_e, \tag{2.75}$$

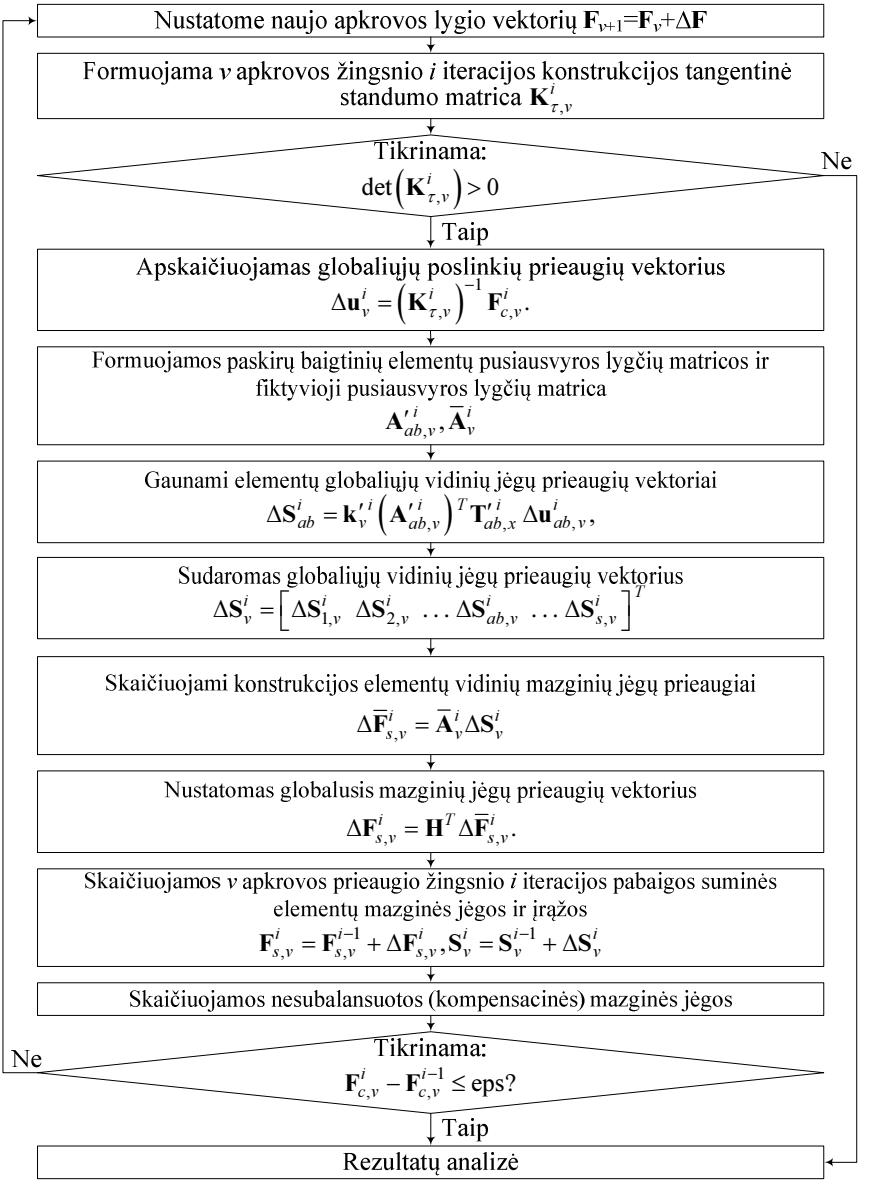
ir takumo (stiprumo) sąlygas, kurios bendru atveju išreiškiamos vektorine funkcija:

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\right) \le 1. \tag{2.76}$$

Taigi aukščiau suformuluotą ekstreminį energinį principą atitinka šis netiesinio matematinio programavimo uždavinys:

$$\begin{aligned} &\text{Rasti} && \min\ U_r = \frac{1}{2}\mathbf{S}_r^T \mathbf{D}_n \mathbf{S}_r, \\ &\text{kai} && \mathbf{A}_n \mathbf{S}_r = \mathbf{F} - \mathbf{A}_n \mathbf{S}_e, \\ & && \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\right) \le \mathbf{1}. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Toliau matematinį modelį (2.77) vadinsime liekamųjų įrąžų analizės uždavinio statine formuluote. Uždavinys (2.77) priskiriamas iškilojo matematinio programavimo uždavinių klasei, jei visi vektorinės takumo funkcijos **f** komponentai yra iškilosios funkcijos.



2.7 pav. Newton-Raphson metodo algoritmas
Fig. 2.7. The Newton-Raphson method algorithm

2.5. Liekamųjų poslinkių analizės uždavinys

Tampriosios plastinės sistemos liekamasis deformuotas būvis nustatomas pagal analizės uždavinio kinematinę formuluotę, gaunamą pasitelkus matematinio programavimo dualumo teoriją. (2.77) uždaviniui užrašysime Lagranžo funkciją. Jai sudaryti parenkami daugikliai: takumo sąlygoms – neneigiami daugikliai $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$, o statikos lygtims – neriboto ženklo daugikliai $\mathbf{u}_r$ (liekamieji poslinkiai). Taigi, ekstreminiam uždaviniui (2.77) Lagranžo funkcija yra tokia:

$$\mathscr{L}\left(\mathbf{S}_r, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_r\right) = \frac{1}{2}\mathbf{S}_r^T \mathbf{D}_n \mathbf{S}_r + \boldsymbol{\lambda}^T \left(-1 + \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\right)\right) - \mathbf{u}_r^T \left(\mathbf{F} - \mathbf{A}_n \mathbf{S}_e - \mathbf{A}_n \mathbf{S}_r\right). \tag{2.78}$$

Dualaus uždavinio apribojimus sudaro funkcijos (2.78) stacionarumo sąlygos pagal pradinio uždavinio (2.77) nežinomuosius $\mathbf{S}_r$ (prilygintos nuliui Lagranžo funkcijos pirmosios išvestinės). Pasirinktu atveju Lagranžo funkcijos stacionarumo sąlygų išraiška tokia:

$$\frac{\partial \mathscr{L}\left(\mathbf{S}_r, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_r\right)}{\partial \mathbf{S}_r} = \mathbf{D}_n \mathbf{S}_r + \left[\frac{\partial \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\right)}{\partial \mathbf{S}_r}\right]^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{A}_n{}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}. \tag{2.79}$$

Transponavus abi šios lygties puses galima parašyti, kad:

$$\mathbf{u}_r^T \mathbf{A}_n = \mathbf{S}_r^T \mathbf{D}_n + \boldsymbol{\lambda}^T \left[\frac{\partial \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\right)}{\partial \mathbf{S}_r}\right] = \mathbf{S}_r^T \mathbf{D}_n + \boldsymbol{\lambda}^T \left[\nabla \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\right)\right]. \tag{2.80}$$

Pastarąją $\mathbf{u}_r^T \mathbf{A}_n$ priklausomybę įrašius į (2.78) formulę, gaunamas naujas Lagranžo funkcijos pavidalas:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(\mathbf{S}_r, \boldsymbol{\lambda}\right) \equiv{}& \frac{1}{2}\mathbf{S}_r^T \mathbf{D}_n \mathbf{S}_r - \boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{1} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\right)\right) + \mathbf{u}_r^T \mathbf{F} - \mathbf{S}_r^T \mathbf{D}_n \mathbf{S}_e - \\ & \boldsymbol{\lambda}^T \left[\nabla \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\right)\right] \mathbf{S}_e - \mathbf{S}_r^T \mathbf{D}_n \mathbf{S}_r - \boldsymbol{\lambda}^T \left[\nabla \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\right)\right] \mathbf{S}_r = \\ & -\frac{1}{2}\mathbf{S}_r^T \mathbf{D}_n \mathbf{S}_r - \boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{1} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\right)\right) + \mathbf{u}_r^T \mathbf{F} - \mathbf{S}_r^T \mathbf{D}_n \mathbf{S}_e - \\ & \boldsymbol{\lambda}^T \left[\nabla \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\right)\right] \left(\mathbf{S}_e + \mathbf{S}_r\right).\end{aligned} \tag{2.81}$$

Taigi, (2.77) uždaviniui dualus yra šis iškilojo matematinio programavimo uždavinys, kuriam reikia:

Rasti $$\max -\frac{1}{2}\mathbf{S}_r^T\mathbf{D}_n\mathbf{S}_r - \boldsymbol{\lambda}^T\left(\mathbf{1}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e,\mathbf{S}_r,\mathbf{S}_0\right)\right)+\mathbf{u}_r^T\mathbf{F}-\mathbf{S}_r^T\mathbf{D}_n\mathbf{S}_e - \boldsymbol{\lambda}^T\left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e,\mathbf{S}_r,\mathbf{S}_0\right)\right](\mathbf{S}_e+\mathbf{S}_r), \tag{2.82}$$

kai $$\mathbf{D}\mathbf{S}_r+\left[\nabla^T\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e,\mathbf{S}_r,\mathbf{S}_0\right)\right]\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{A}_n{}^T\mathbf{u}_r=\mathbf{0},\ \boldsymbol{\lambda}\ge\mathbf{0}.$$

Energinis principas, atitinkantis ekstremumo uždavinio matematinį modelį (2.82), yra formuluojamas taip (Čyras 1983; Atkočiūnas *et al.* 2010): iš visų kinematiškai leistinų liekamųjų poslinkių vektorių tikrasis yra tas, kuris atitinka papildomo darbo maksimumą.

Toliau šį matematinį modelį vadinsis liekamųjų įrąžų analizės uždavinio kinematine formuluote. Išsprendus (2.82) uždavinį randami liekamieji poslinkiai $\mathbf{u}_r$ ir liekamosios įrąžos $\mathbf{S}_r$.

2.6. Liekamųjų poslinkių analizės uždavinys taikant normatyvinius reikalavimus

Takumo (stiprumo) sąlygos statybinių konstrukcijų projektavimą reglamentuojančiuose dokumentuose (Eurocode 3 2006; STR 2.05.08:2005; ANSI/AISC 360-10) dažnai išreiškiamos tiesinėmis funkcijomis. Bendruoju atveju šias sąlygas galima užrašyti tokia matematine išraiška:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{S}_e+\mathbf{S}_r)\le\mathbf{S}_0, \tag{2.83}$$

čia $\boldsymbol{\Phi}$ – ($t\times n$) matmenų konstrukcijos stiprumo (takumo) sąlygų koeficientų matrica; t – takumo (stiprumo) sąlygų skaičius.

Šiuo atveju liekamųjų įrąžų analizės uždavinys užrašomas taip:

Rasti $$\min\ U_r=\frac{1}{2}\mathbf{S}_r^T\mathbf{D}_n\mathbf{S}_r, \tag{2.84}$$

kai $$\mathbf{A}_n\mathbf{S}_r=\mathbf{F}-\mathbf{A}_n\mathbf{S}_e, \tag{2.85}$$

$$\boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}_r\le\mathbf{S}_0-\boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}_e. \tag{2.86}$$

Tokio uždavinio kinematinė formuluotė yra:

Rasti $$\max\ -\frac{1}{2}\mathbf{S}_r^T\mathbf{D}_n\mathbf{S}_r-\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{S}_0+\mathbf{u}_r^T\mathbf{F}-\mathbf{S}_r^T\mathbf{D}_n\mathbf{S}_e, \tag{2.87}$$

kai $$\mathbf{D}_n\mathbf{S}_r+\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{A}_n{}^T\mathbf{u}_r=\mathbf{0}, \tag{2.88}$$

$$\boldsymbol{\lambda}\ge\mathbf{0}. \tag{2.89}$$

Tai yra iškilojo kvadratinio matematinio programavimo uždaviniai. Panaudojus (2.85) bei (2.88) lygtis, galima gauti liekamųjų įražų $\mathbf{S}_r$ ir liekamųjų poslinkių vektorių $\mathbf{u}_r$ išraiškas:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_r &= \left(\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{A}_n^T(\mathbf{A}_n\mathbf{D}_n\mathbf{A}_n^T)^{-1}\mathbf{A}_n\mathbf{D}_n^{-1} - \mathbf{D}_n^{-1}\right)\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\lambda} + \\ &\quad \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{A}_n^T(\mathbf{A}_n\mathbf{D}_n\mathbf{A}_n^T)^{-1}\left(\mathbf{F} - \mathbf{A}_n\mathbf{S}_e\right) = \bar{\mathbf{G}}\,\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\lambda} + \bar{\mathbf{H}}\left(\mathbf{F} - \mathbf{A}_n\mathbf{S}_e\right),\end{aligned} \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_r &= (\mathbf{A}_n\mathbf{D}_n\mathbf{A}_n^T)^{-1}\mathbf{A}_n\mathbf{D}_n^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\lambda} + (\mathbf{A}_n\mathbf{D}_n\mathbf{A}_n^T)^{-1}\mathbf{F} - \\ &\quad (\mathbf{A}_n\mathbf{D}_n\mathbf{A}_n^T)^{-1}\mathbf{S}_e = \bar{\mathbf{H}}^T\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\lambda} + (\mathbf{A}_n\mathbf{D}_n\mathbf{A}_n^T)^{-1}\left(\mathbf{F} - \mathbf{S}_e\right),\end{aligned} \tag{2.91}$$

čia $\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{A}_n^T(\mathbf{A}_n\mathbf{D}_n\mathbf{A}_n^T)^{-1}\mathbf{A}_n\mathbf{D}_n^{-1} - \mathbf{D}_n^{-1}$ – liekamųjų įrąžų infliuentinė matrica; $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{A}_n^T(\mathbf{A}_n\mathbf{D}_n\mathbf{A}_n^T)^{-1}$ – liekamųjų poslinkių infliuentinė matrica;

Gautas (2.90) ir (2.91) išraiškas įrašius į (2.84) ir atlikus atitinkamus matematinius veiksmus, gaunama (2.87)–(2.89) uždavinio modifikacija – iškilosios kvadratinės funkcijos ekstremumo uždavinys neneigiamų vektorių $\boldsymbol{\lambda}$ ortante:

$$\text{Rasti} \quad \max \ \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Phi}\bar{\mathbf{G}}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^T\left(\mathbf{S}_0 - \boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}_e\right) + \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Phi}\bar{\mathbf{H}}\left(\mathbf{F} - \mathbf{A}_n\mathbf{S}_e\right) + const \tag{2.92}$$

$$\text{kai} \qquad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}.$$

čia

$$const = \frac{1}{2}\mathbf{F}^T(\mathbf{A}_n\mathbf{D}_n\mathbf{A}_n^T)^{-1}\mathbf{F} + \frac{1}{2}\mathbf{S}_e^T\mathbf{A}_n^T(\mathbf{A}_n\mathbf{D}_n\mathbf{A}_n^T)^{-1}\mathbf{A}_n\mathbf{S}_e - \mathbf{F}^T(\mathbf{A}_n\mathbf{D}_n\mathbf{A}_n^T)^{-1}\mathbf{A}_n\mathbf{S}_e$$

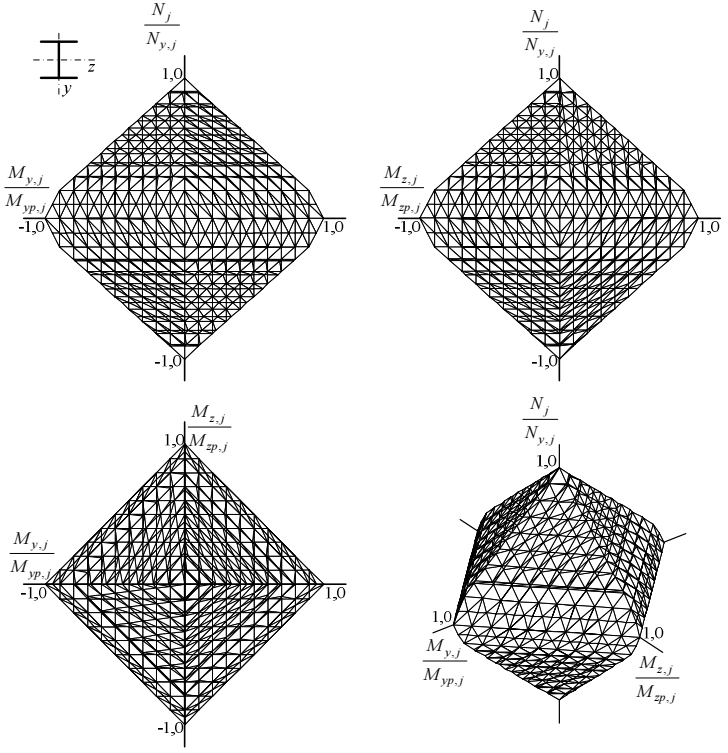
– narys, kuris neturi įtakos uždavinio (2.92) sprendimui ir esant optimaliam sprendiniui tampa lygus nuliui.

Uždaviniai (2.78), (2.82), (2.84)–(2.86), (2.87)–(2.89) arba (2.92) yra netiesinio iškilojo matematinio programavimo uždaviniai, kurių nežinomieji yra vektoriai $\mathbf{S}_r$, $\mathbf{u}_r$, ir $\boldsymbol{\lambda}$.

2.7. Stiprumo sąlygos sudėtingo deformavimosi būviui

Formuluojant tamprių plastinių konstrukcijų analizės uždavinius bei jų matematinius modelius, vienas iš svarbiausių aspektų – stiprumo sąlygų parinkimas. Nagrinėjant erdvines konstrukcijas kalbama apie sudėtingą deformacijų būvį. Tikslinga būtų naudoti stiprumo sąlygas, kurios apimtų ne tik tempimo-gniuždymo, bet lenkimus apie vieną ir kitą konstrukcijos elemento ašį. Stiprumo sąlygos, esant sudėtingam deformacijų būviui dažnai aprašomos

normatyviniuose dokumentuose, reglamentuojančiuose statybinių konstrukcijų projektavimą (ANSI/AISC 360-10).



2.8 pav. Plastiškumo paviršius pagal AISC-LRFD
Fig. 2.8. The yield surface by AISC-LRFD strength conditions

Sijinių-koloninių elementų plastinio stiprumo paviršius pagal AISC-LRFD (2.8 pav.) (Kim S.-E. *et al.* 2001; Aminmansour 2000; ANSI/AISC 360-10) projektavimo norminius dokumentus užrašomas taip:

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{N_j}{N_{y,j}} + \frac{8}{9}\frac{M_{y,j}}{M_{yp,j}} + \frac{8}{9}\frac{M_{z,j}}{M_{zp,j}}, \; kai \frac{N_j}{N_{y,j}} \geq \frac{2}{9}\frac{M_{y,j}}{M_{yp,j}} + \frac{2}{9}\frac{M_{z,j}}{M_{zp,j}}, \\ 1 &\geq \frac{N_j}{2N_{y,j}} + \frac{M_{y,j}}{M_{yp,j}} + \frac{M_{z,j}}{M_{zp,j}}, \; kai \frac{N_j}{N_{y,j}} < \frac{2}{9}\frac{M_{y,j}}{M_{yp,j}} + \frac{2}{9}\frac{M_{z,j}}{M_{zp,j}}, \end{aligned} \tag{2.93}$$

čia N_j – konstrukcijos elementą veikianti ašinė jėga j-ajame pjūvyje; $N_{y,j}$ – tempiamo ar gniuždomo konstrukcijos elemento skerspjūvio skaičiuotinė ribinė ašinė jėga *j*-ajame pjūvyje; $M_{y,j}$ – konstrukcijos elementą veikiantis lenkimo momentas apie profilio „silpnąją“ ašį *j*-ajame pjūvyje; $M_{yp,j}=f_u \cdot W_{ypl}$ – konstrukcijos elemento skerspjūvio skaičiuotinis ribinis lenkimo momentas apie

„silpnąją“ ašį *j*-ajame pjūvyje; $M_{z,j}$ – konstrukcijos elementą veikiantis lenkimo momentas apie profilio „stipriąją“ ašį *j*-ajame pjūvyje; $M_{zp,j}=f_u \cdot W_{zpl}$ – konstrukcijos elemento skerspjūvio skaičiuotinis ribinis lenkimo momentas apie „stipriąją“ ašį *j*-ajame pjūvyje.

Visos aukščiau paminėtos ribinės įrąžos nustatomos pagal konstrukcijų projektavimą reglamentuojančius normatyvinius dokumentus (ANSI/AISC 360-10). Vietinis konstrukcijos stabilumas tikrinamas, kai gniuždomieji elementai apkrauti iki jų kritinių jėgų reikšmių. Gniuždomų elementų kritinės įrąžų reikšmės šiame darbe apskaičiuojamos pagal projektavimo normų reikalavimus. Eurocode 3 2006 normatyviniuose dokumentuose yra pateikiama tokia išraiška:

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_u}{\gamma_{\mathrm{M1}}}, \tag{2.94}$$

čia $N_{b,Rd}$ – skaičiuotinė gniuždomo elemento klupamoji galia; χ – klupumo koeficientas; A – konstrukcijos elemento skerspjūvio plotas; f_u – konstrukcijos medžiagos stiprumo (takumo) riba; γ_{M1} – dalinis koeficientas (laikomas lygus 1,0).

Klupumo koeficientas χ pagal atitinkamą sąlyginį liaunį $\bar{\lambda}$ apskaičiuojamas pagal formulę:

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}}, \qquad \text{bet } \chi \le 1,0 \tag{2.95}$$

čia $\Phi = 0,5\left[1 + \alpha\left(\bar{\lambda} - 0,2\right) + \bar{\lambda}^2\right]$; $\bar{\lambda} = \sqrt{A f_u / N_{cr}}$; N_{cr} – tamprioji kritinė jėga, apskaičiuojama pagal formulę:

$$N_{cr} = \pi^2 EI / l_b^2, \tag{2.96}$$

čia E – konstrukcijos medžiagos tamprumo modulis; I – konstrukcijos elemento skerspjūvio inercijos momentas; l_b – klumpamasis ilgis nagrinėjamoje klupumo plokštumoje, apskaičiuojamas pagal formulę:

$$l_b = \mu l, \tag{2.97}$$

čia μ – skaičiuojamojo ilgio koeficientas, apskaičiuojamas pagal formules pateiktas 2.2 lentelėje; l – konstrukcijos elemento ilgis.

Klupdymo koeficientai pagal (2.91) formulę apskaičiuojami skaidant erdvinį rėmą į plokščius rėmus ir atskirai nustatant koeficientus dviejose klupdymo plokštumose.

Globalus, visos konstrukcijos, stabilumas tikrinamas skaičiuojant visos konstrukcijos tangentinės standumo matricos determinantą pagal (2.1) lygtį, paskutiniame skaitinės realizacijos skaičiavimo etape. Jei determinanto reikšmė

tampa lygi nuliui – konstrukcija prarado bendrą stabilumą. Tolimesni skaičiavimai nėra vykdomi.

Sprendžiant analizės uždavinį yra naudojamos stiprumo sąlygos (2.93). Galimi du šių sąlygų panaudojimo variantai. Pirmasis variantas – naudoti (2.93) sąlygas, jų nekeičiant, analizės uždavinio sprendimui pagal (2.77) arba (2.82) formuluotes. Antrasis variantas – pakeisti stiprumo sąlygas, užrašant jas tiesinėmis funkcijomis:

$$\begin{aligned} M_{zp,j} &\geq c_{y,j}P_j + \frac{8}{9}m_{y,j}M_{y,j} + \frac{8}{9}M_{z,j},\ kai\ c_{y,j}P_j \geq \frac{2}{9}m_{y,j}M_y + \frac{2}{9}M_{z,j}, \\ M_{zp,j} &\geq \frac{1}{2}c_{y,j}P_j + m_{y,j}M_{y,j} + M_{z,j},\ kai\ c_{y,j}P_j < \frac{2}{9}m_{y,j}M_y + \frac{2}{9}M_{z,j}, \end{aligned} \tag{2.98}$$

čia $c_{y,j}=M_{zp,j}/P_{y,j}$; $m_{y,j}=M_{zp,j}/M_{yp,j}$.

Panaudojus šias išraiškas analizės uždavinys gali būti sprendžiamas naudojantis (2.84)–(2.86), (2.87)–(2.89) ar (2.92) matematiniais modeliais.

Projektavimo normatyviniai dokumentai kaip matyti 2.8 paveiksle, pateikia ištiesintas stiprumo sąlygas, kurios sąlygoja didesnį konstrukcijų patikimumą, bet mažina tikslumą aprašant konstrukcijos darbą bei tikrąjį ĮDB. (Kim *et al.* 2001; Chiorean *et al.* 2005) darbuose nagrinėjami konstrukcijų analizės uždaviniai, kuriuose naudojamos Orbison stiprumo sąlygos. Minėtų autorių atlikti tyrimai rodo, kad šios sąlygos tiksliau aprašo konstrukcijų darbą. Jų išraiška užrašoma:

$$1 \geq 1{,}15n_j^2 + m_{z,j}^2 + m_{y,j}^4 + 3{,}67n_j^2m_{z,j}^2 + 3{,}0n_j^6m_{y,j}^2 + 4{,}65m_{z,j}^4m_{y,j}^2, \tag{2.99}$$

čia $n_j=N_j/N_{y,j}$; $m_{y,j}=M_{y,j}/M_{yp,j}$ – elemento skerspjūvio ploto "silpnoji" ašis; $m_{z,j}=M_{z,j}/M_{zp,j}$ – elemento skerspjūvio ploto "stiprioji" ašis.

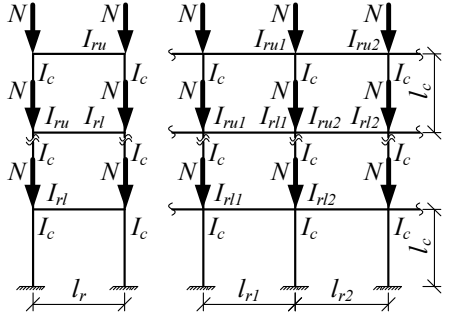
Orbison stiprumo sąlygų takumo paviršius yra pateiktas 2.9 paveiksle.

Aukščiau minėtos stiprumo sąlygos, apibrėžiančios sudėtingą ĮDB, nevertina sukimo įrąžos. Tad sukimo stiprumo sąlyga turi buti vertinama atskirai. Normatyviniai dokumentai (Eurocode 3 2006) siūlo sukimo stiprumo sąlygą išreikšti taip:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd}} \leq 1{,}0, \tag{2.100}$$

čia T_{Ed} yra skaičiuotinė sukamojo momento reikšmė; T_{Rd} yra skaičiuotinė skerspjūvio sukamoji galia.

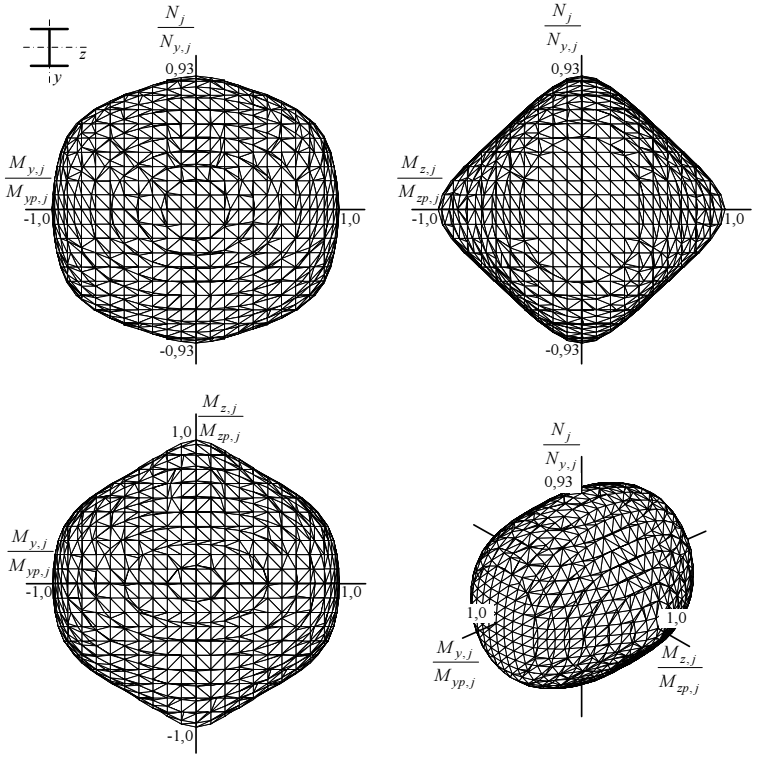
2.2 lentelė. Laisvųjų rėmų skaičiuojamojo ilgio koeficientai (pagal STR 2.05.08:2005)
Table 2.2. Free frames effective length coefficients (by STR 2.05.08:2005)

Laisvųjų rėmų skaičiuojamosios schemos	Formulės koeficientui μ apskaičiuoti	Koeficientai n ir p naudojami 2 stulpelyje	
		Vienaangių rėmų	Daugiaangių rėmų
	Apatinis aukštas: $\sqrt{\frac{n+0,56}{n+0,14}}$ Kiti aukštai: kai $n \le 0,2$ $\frac{(p+0,68)\sqrt{n+0,22}}{\sqrt{0,68p(p+0,9)(n+0,08)+0,1n}}$ Kai $n \ge 0,2$ $\frac{(p+0,63)\sqrt{n+0,28}}{\sqrt{pn(p+0,9)+0,1n}}$	Apatinis aukštas $n=\frac{I_{ru}l_c}{l_r I_c}$ Vidurinis aukštas $n=\frac{I_{ru}l_c}{2l_r I_c}$ $p=\frac{I_{rl}l_c}{2l_r I_c}$ Viršutinis aukštas $n=\frac{I_{ru}l_c}{l_r I_c}$ $p=\frac{I_{rl}l_c}{2l_r I_c}$	Apatinis aukštas $n=\frac{k(n_1+n_2)}{k+1}$ Vidurinis aukštas $n=\frac{k(n_1+n_2)}{k+1}$ $p=\frac{k(p_1+p_2)}{k+1}$ Viršutinis aukštas $n=\frac{2k(n_1+n_2)}{k+1}$ $p=\frac{k(p_1+p_2)}{k+1}$

Žymenys:

$n_1=\frac{I_{ru,1}l_c}{l_{r,1}I_c}$; $n_2=\frac{I_{ru,2}l_c}{l_{r,2}I_c}$; $p_1=\frac{I_{rl,1}l_c}{l_{r,1}I_c}$; $p_2=\frac{I_{rl,2}l_c}{l_{r,2}I_c}$; I_c ir l_c – tikrinamosios kolonos skerspjūvio inercijos momentas ir ilgis; l_r l_{r1} ir l_{r2} – rėmo tarpatramiai; I_{ru}, I_{ru1}, I_{ru2} ir I_{rl}, I_{rl1}, I_{rl2} – prie tikrinamosios kolonos viršutinių ir apatinių galų prijungtų rėmo sijų skerspjūvių inercijos momentai.

Pastaba. Kraštinės laisvojo daugiaatramio (daugiaangio) rėmo kolonos koeficientas μ apskaičiuojamas kaip vienaangio rėmo kolonų.



2.9 pav. Plastiškumo paviršius pagal Orbison (Kim S.-E. *et al.* 2001) stiprumo sąlygas

Fig. 2.9. The yield surface by Orbison (Kim S.-E. *et al.* 2001) strength conditions

Konstrukcijos elemento sukamoji galia (Икрин 2004; Trahair *et al.* 2008) darbuose išreiškiama formule:

$$T_{Rd} = \tau_y W_t, \tag{2.101}$$

čia τ_y yra takumo įtempis grynosios šlyties metu; W_t yra atsparumo momentas esant laisvam sukimui, apskaičiuojamas pagal formulę:

$$W_t = \frac{I_t}{t_{\max}}, \tag{2.102}$$

čia I_t yra sukimo konstanta; $t_{\max}$ yra didžiausias nagrinėjamo konstrukcijos elemento skerspjūvio storis.

2.8. Ekstreminio energinio principo naudojimo pagrindimas

Geometriškai netiesinių tamprių plastinių konstrukcijų tikrojo ĮDB nustatymui ekstreminio energinio principo apie minimalią papildomo deformavimo energiją taikymas yra grindžiamas skaitiniu eksperimentu. Jis atliekamas su standžiai įtvirtinta galuose sija, apkrauta jėga F. Nagrinėjamos konstrukcijos diskretinis modelis yra pateiktas 1.6 paveikslo a dalyje. Sijos geometriniai rodikliai: skerspjūvio plotas A=28,5 cm^2; inercijos momentas I=1943 cm^4; plastinis atsparumo momentas W_{pl}=225 cm^3; fiziniai parametrai: tamprumo modulis E=206 GPa; takumo riba f_u=550 MPa; ribinis lenkimo momentas M_0=12375 kNcm; ribinė ašinė jėga N_0=1567,5 kNcm.

Skaičiavimams buvo pasirinktos stiprumo sąlygos skirtos plokščių konstrukcijų analizei (Atkočiūnas *et al.* 2010):

$$\begin{cases} M_j \le M_0, \ -M_j \le M_0, \\ c_j N_j + 1/1{,}18 M_j \le M_0, \ c_j N_j - 1/1{,}18 M_j \le M_0, \end{cases}$$

čia N_j ir M_j – skaičiuotinės įrąžų reikšmės j–ajame pjūvyje; c_j=$N_{0,j}$/$M_{0,j}$ – ribinių įrąžų reikšmių santykis.

Panagrinėkime sijos taško, kuriame pridėta jėga, vertikalaus poslinkio kitimą jėgai F (2.10 pav. a) didėjant nuo nulio iki didžiausios reikšmės, kai visuose sijos skaičiuojamuosiuose pjūviuose atsiras plastinės deformacijos (plastiniai lankstai) ir statiškai neišsprendžiama sija taps statiškai išsprendžiama konstrukcija.

Sprendžiami 3 uždaviniai:

1. Tiesinė analizė panaudojant tamprių sprendinių metodą.

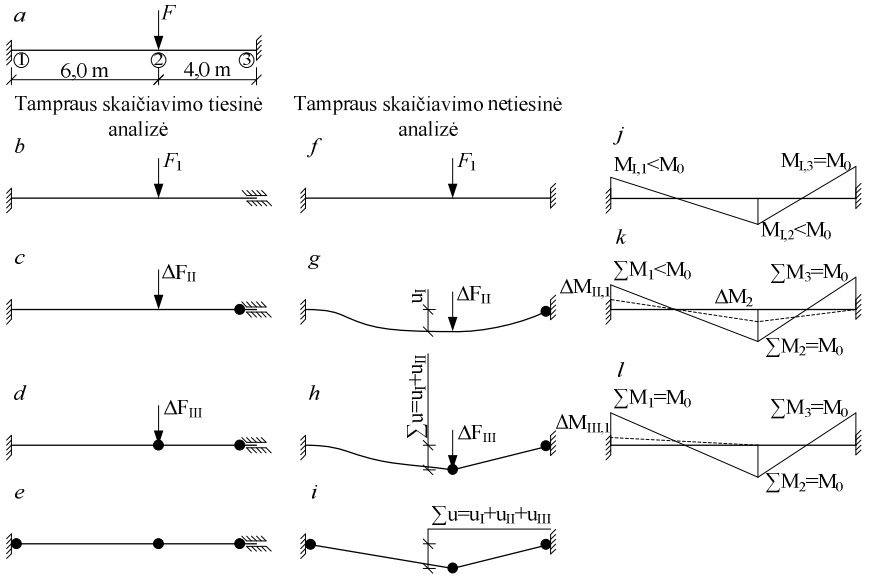
2. Netiesinė analizė panaudojant tamprių sprendinių metodą.

3. Tampri plastinė netiesinė analizė taikant matematinį modelį – (2.84)–(2.86) arba (2.87)–(2.89).

Visų trijų skaičiavimų rezultatai yra pateikti 2.3 lentelėje.

Pirmieji du skaičiavimai buvo atliekami trimis etapais-pakopomis, kurie yra pateikti 2.10 paveiksle. Tampraus skaičiavimo tiesinės analizės etapai yra pateikti 2.10 paveikslo b, c ir d dalyse, e dalyje pateiktas konstrukcijos diskretinis modelis gaunamas po paskutinio skaičiavimo etapo. Tampraus skaičiavimo netiesinės analizės etapai yra pateikti 2.10 paveikslo *f*, *g* ir *h* dalyse, *i* dalyje pateiktas konstrukcijos diskretinis modelis gaunamas po paskutinio skaičiavimo etapo-pakopos. Svarbu pažymėti, kad tampraus skaičiavimo tiesinės analizės metu sprendžiama eilė uždavinių didinant apkrovą bei tikrinant plastinių deformacijų atsiradimą skaičiuojamuosiuose pjūviuose ir po kiekvieno etapo-pakopos keičiamas diskretinis modelis, įvedant lankstą pjūvyje, kuriame pasireiškė plastinės deformacijos. O tampraus skaičiavimo netiesinės analizės metu, ne tik

įvedamas lankstas, bet ir keičiama vidurinio mazgo koordinatė. Šių dviejų skaičiavimų sąlyginės lenkimo momentų diagramos po kiekvieno etapo pakopos yra pateiktos *j*, *k* ir *l* dalyse.



2.10 pav. Plokščia sija ir jos skaičiavimo etapai
Fig. 2.10. The two-dimensional beam and it's calculation stages

Pirmieji du skaičiavimai buvo atliekami trimis etapais-pakopomis, kurie yra pateikti 2.10 paveiksle. Tampraus skaičiavimo tiesinės analizės etapai yra pateikti 2.10 paveikslo b, c ir d dalyse, e dalyje pateiktas konstrukcijos diskretinis modelis gaunamas po paskutinio skaičiavimo etapo. Tampraus skaičiavimo netiesinės analizės etapai yra pateikti 2.10 paveikslo *f*, *g* ir *h* dalyse, *i* dalyje pateiktas konstrukcijos diskretinis modelis gaunamas po paskutinio skaičiavimo etapo-pakopos. Svarbu pažymėti, kad tampraus skaičiavimo tiesinės analizės metu sprendžiama eilė uždavinių didinant apkrovą bei tikrinant plastinių deformacijų atsiradimą skaičiuojamuosiuose pjūviuose ir po kiekvieno etapo-pakopos keičiamas diskretinis modelis, įvedant lankstą pjūvyje, kuriame pasireiškė plastinės deformacijos. O tampraus skaičiavimo netiesinės analizės metu, ne tik įvedamas lankstas, bet ir keičiama vidurinio mazgo koordinatė. Šių dviejų skaičiavimų sąlyginės lenkimo momentų diagramos po kiekvieno etapo pakopos yra pateiktos *j*, *k* ir *l* dalyse.

Trečiojo skaičiavimo metu pasikeitimai diskretiniame modelyje nėra sekami. Tiesiog pasirenkamas apkrovos lygis ir atliekamos tampraus skaičiavimo netiesinė ir tampri plastinė netiesinė analizės, kurių rezultatų suma ir yra ĮDB dydžiai.

2.3 lentelė. Plokščios sijos skaičiavimo rezultatai
Table 2.3. The two-dimensional beam calculations results

	I pakopa (I plastinis lankstas)			II pakopa (II plastinis lankstas)			III pakopa (III plastinislankstas)		
	Tamprus skaičiavimas		Tampraus skaičiavimo netiesinė analizė + tampri plastinė netiesinė analizė F_I=89,01 kN	Tamprus skaičiavimas		Tampraus skaičiavimo netiesinė analizė + tampri plastinė netiesinė analizė F_{II}=107,85 kN	Tamprus skaičiavimas		Tampraus skaičiavimo netiesinė analizė + tampri plastinė netiesinė analizė F_{III}=112,66 kN
	Tiesinė analizė F_I=85,94 kN	Netiesinė analizė F_I =89,01 kN		Tiesinė analizė ΔF_{II}=14,32 kN (ΣF=100,26 kN)	Netiesinė analizė ΔF_{II}=18,37 kN (ΣF=107,38 kN)		Tiesinė analizė ΔF_{III}=2,86 kN (ΣF=103,12 kN)	Netiesinė analizė ΔF_{III}=14,20 kN (ΣF=121,58 kN)	
$N_{1\text{-}2}$, kN	0	110,2549	110,2542	0	98,5792 (Σ=208,8340)	203,7681	0 (Σ=0)	199,3199 (Σ=408,1539)	239,311
M_1, kNcm	–8250	–8249,59	–8249,56	–2406,25 (Σ=–10656,25)	–2406,24 (Σ=–10655,83)	–10654,1	–1718,75 (Σ=–12375)	–1719,46 (Σ=–12375,3)	–12373,1
$M_{2,R}$, kNcm	–9900	–9899,45	–9899,42	–2475 (Σ=–12375)	–2475,12 (Σ=–12374,57)	–12372,3	0 (Σ=–12375)	–0,29942 (Σ=–12374,9)	–12371,5
$N_{2\text{-}3}$, kN	0	110,4811	110,4803	0 (Σ=0)	98,6206 (Σ=209,1017)	203,7248	0 (Σ=0)	199,2877 (Σ=408,3893)	239,1102
$M_{2,L}$, kNcm	9900	9900,267	9900,232	2475 (Σ=12375)	2475,109 (Σ=12375,38)	12375	0 (Σ=12375)	0 (Σ=12375,38)	12375
M_3, kNcm	12375	12375,05	12375	0 (Σ=12375)	0,0165 (Σ=12375,07)	12375	0 (Σ=12375)	0 (Σ=12375,07)	12375
u, cm (Vertikalus, apkrovos pridėjimo vietoje)	9,8936	9,8952	9,8951	3,5040 (Σ=13,3976)	3,5070 (Σ=13,4022)	13,4001	5,1529 (Σ=18,5505)	5,1636 (Σ=18,5658)	18,56

Gautų rezultatų analizė leidžia teigti, kad trečiasis, šiame darbe pasiūlytas tikrojo ĮDB nustatymo skaičiavimas, galiausiai duoda praktiškai identiškas poslinkių reikšmes toms, kurios gaunamos tampraus skaičiavimo tiesinės ir netiesinės analizių metu. Gaunama kritinė apkrovos reikšmė (kuriai esant pasireiškia plastinės deformacijos trijuose skaičiuojamuosiuose pjūviuose) yra mažesnė ir tai galima vertinti, kaip tam tikrą atsargą vertinant konstrukcijos stiprumą. Tokiu būdu, metodika pasirinkta realiam konstrukcijos ĮDB nustatyti, turi tam tikrus privalumus:

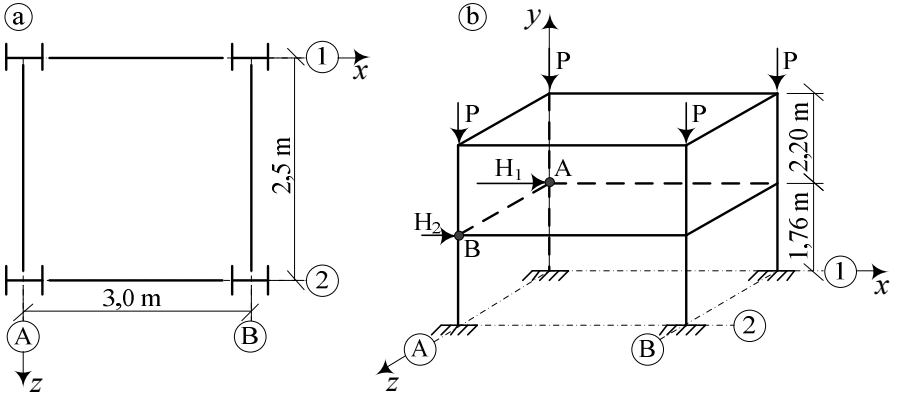
1. Vykdant konstrukcijos analizę ir norint nustatyti tikrąjį deformuotąjį būvį, nereikia sekti plastinių lankstų susidarymo bei keisti pradinio diskretinio modelio. Skaičiavimas atliekamas per vieną žingsnį;
2. Apskaičiuoti konstrukcijos poslinkiai yra tokie patys, ribinė apkrovos reikšmė gaunama su tam tikra atsarga.

Reziumuojant galima teigti, kad vykdant optimizavimo uždavinio iteracinio skaičiavimo procesą, tikram ĮDB nustatyti tikslinga naudoti aprašytą tamprių plastinių konstrukcijų analizę.

2.9. Analizės uždavinio skaitinė realizacija

Aukščiau esančiame skyriuje atliktas skaitinis eksperimentas yra daugiau analitinio pobūdžio, labiau įrodantis pasirinkto ekstreminio energinio principo efektyvumą, lyginant su kitais skaičiavimo principus. Geriausiai principo efektyvumą ir rezultatų patikimumą parodytų realios konstrukcijos analizė bei jos rezultatų palyginimas su natūriniais bandymais. Tam buvo pasirinkta dviejų aukštų erdvinė rėminė konstrukcija, kuri buvo išstudijuota darbuose: Kim and Kang (2002), Kim *et al.* (2003) (šiuose darbuose yra bandoma reali rėminė konstrukcija) Kim, Lee (2002) (šiame darbe pateikta to paties rėmo diskretinio modelio, sumodeliuoto ABAQUS programos aplinkoje, analizė).

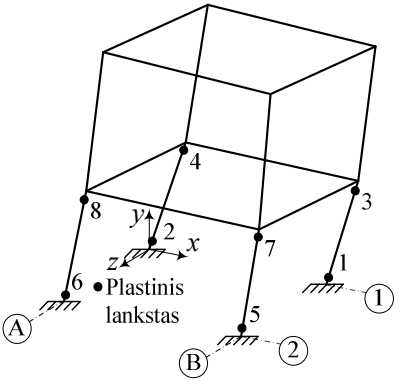
Konstrukcijos elementai modeliuojami iš H150×150×7×10 tipo plieno profiliuočių. Rėmo gabaritiniai matmenys yra pateikti 2.11 paveiksle – plotis x ašies kryptimi 2,5 m, ilgis y ašies kryptimi 3,0 m, aukštis nuo kolonos elementų atramų iki antro aukšto grindų 1,76 m ir aukštis nuo antro aukšto grindų iki stogo 2,2 m. Visi elementų skerspjūvio plotų geometriniai ir fiziniai parametrai yra pastovūs visame konstrukcijos elemento ilgyje. Visų konstrukcijos elementų takumo (stiprumo) riba yra 320 MPa, tamprumo modulis 221 GPa ir šlyties modulis 85 GPa. Yra nagrinėjami trys skirtingi konstrukcijos modelio apkrovimo variantai, kurie yra pateikti 2.4 lentelėje.



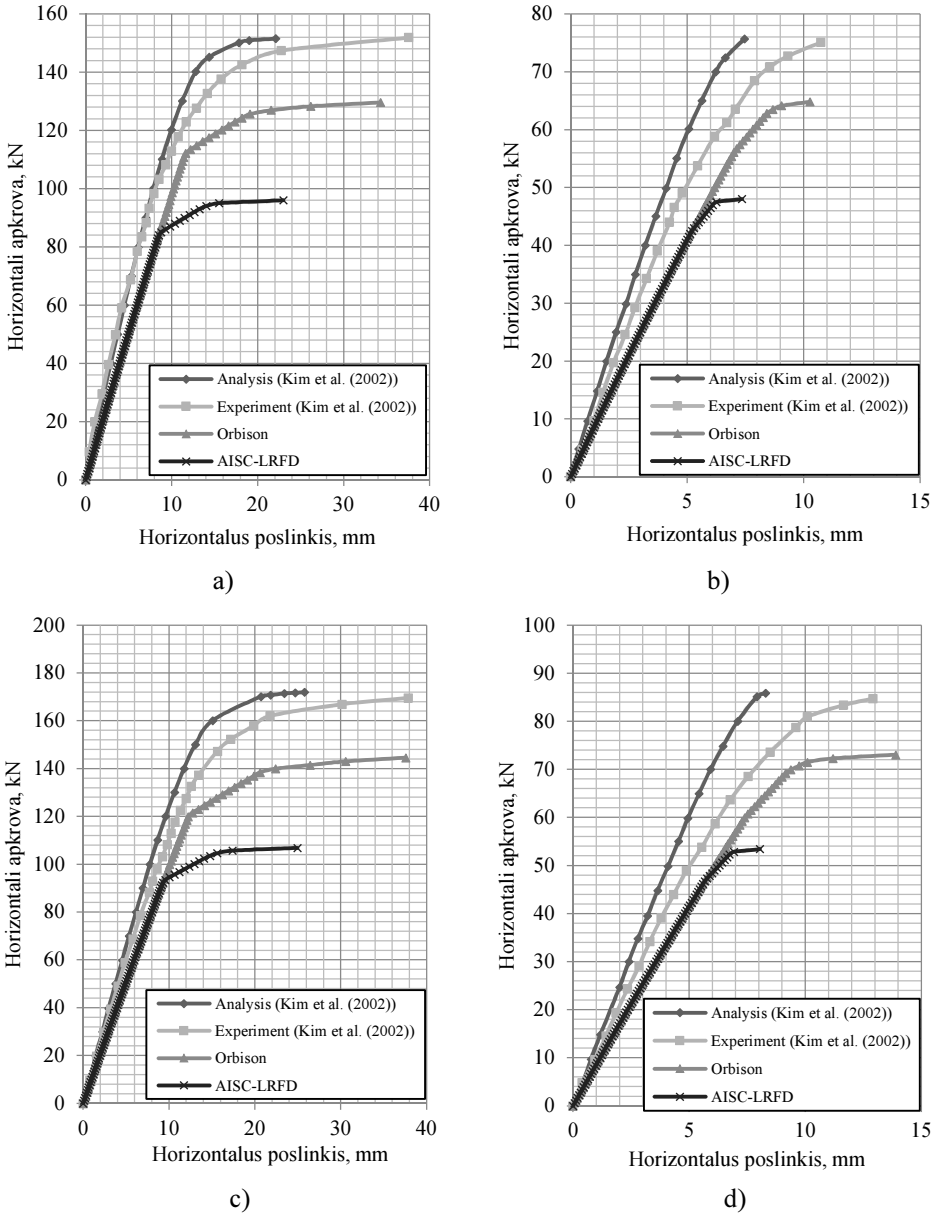
2.11 pav. Erdvinio dviejų aukštų rėmo diskretinis modelis (a – vaizdas iš viršaus; b – erdvinis vaizdas)
Fig. 2.11. A discrete model of the two-story three-dimensional frame (a – the plane view; b – the three-dimensional view)

2.4 lentelė. Analizuojamo rėmo apkrovimo variantai
Table 2.4 Load cases of the analysed frame

Apkrovos variantas	Vertikali apkrova	Horizontali apkrova H_1	Horizontali apkrova H_2
1	*P*	*P*/*5*	*P*/*10*
2	*P*	*P*/*4*	*P*/*8*
3	*P*	*P*/*3*	*P*/6

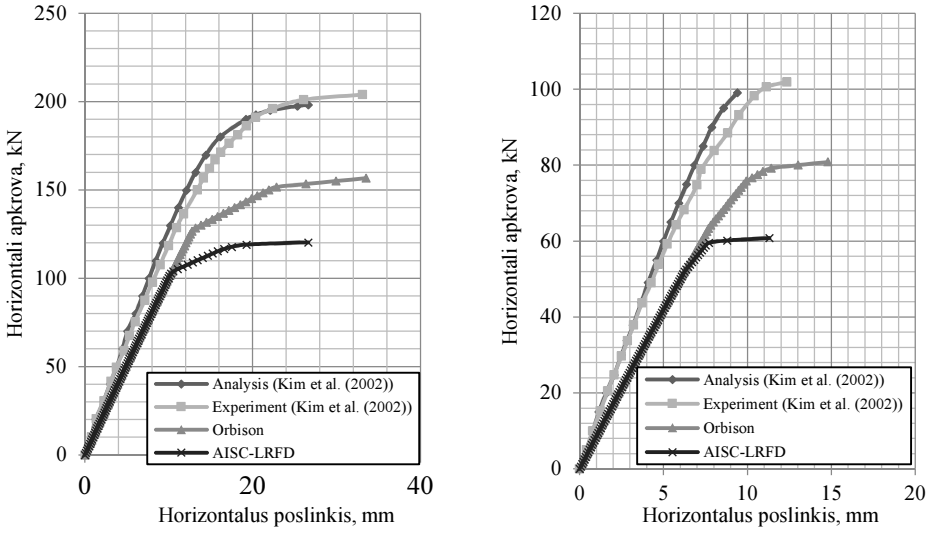


2.12 pav. Dviejų aukštų rėmo deformuotas vaizdas veikiant pirmo apkrovos varianto ribinei reikšmei
Fig. 2.12. The shape of the deformed two-story three-dimensional frame under the ultimate load of the first load case



2.13 pav. Apkrovos poslinkio kreivės A ir B mazgams pirmojo apkrovos varianto (a) ir (b) ir antrojo apkrovos varianto (c) ir (d) atveju

Fig. 2.13. Node A and B load-displacement curves under the first load case ((a) and (b) properly) and under the second load case ((c) and d) properly)



2.14 pav. Apkrovos poslinkio kreivės A ir B mazgams trečiojo apkrovos varianto (a) ir (b) atveju

Fig. 2.14. Nodes A and B load-displacement curves under the third load case (a) and b) properly)

Kiekvienam apkrovos variantui buvo atlikta po du skaičiavimus. Pirmasis skaičiavimas buvo atliekamas taikant Orbison stiprumo (takumo) sąlygas (2.99), antrasis skaičiavimas buvo atliekamas taikant AISC-LRFD normatyvinio dokumento stiprumo (takumo) sąlygas (2.93) arba (2.98). Gauti dviejų aukštų analizės rezultatai buvo palyginti su rezultatais gautais Kim, Lee (2002) darbe.

Plastinių lankstų susidarymo eiliškumas ir deformuoto rėmo vaizdas veikiant ribiniai apkrovai yra pateikti 2.12 paveiksle. Plastiniai lankstai iš pradžių susidaro kolonų elementuose esančiuose „1“ ašyje, prie atramų. Apkrovai didėjant plastiniai lankstai atsiranda šių elementų viršuje. Toliau plastiniai lankstai tokiu pačiu eiliškumu susidaro kolonose esančiose ašyje „2“. Kadangi horizontalios apkrovos nėra simetrinės, elementuose susidaro sukimo įrąžos ir pirmo aukšto kolonų elementai susisuka. Plastinių lankstų susidarymo eiliškumas priklausomai nuo veikiančiosios apkrovos didumo yra pateiktas 2.5 lentelėje. Čia duomenys yra pateikti pirmajam apkrovos variantui, pasirinkus ribinę P reikšmę, kuri yra lygi 675 kN. Taškų A ir B apkrovų-poslinkių kreivės visiems apkrovos variantams yra parodytos 2.13 ir 2.14 paveiksluose.

Skaitinio eksperimento rezultatai parodė, kad rezultatai, gaunami taikant Orbison stiprumo (takumo) sąlygas (2.99), yra artimesni duomenims gautiems (Kim and Lee 2002) darbe. Didesnis nuokrypis buvo gautas, kai buvo taikomos AISC-LRFD normatyvinio dokumento stiprumo (takumo) sąlygos (2.93) arba

(2.98). Šios sąlygos yra griežtesnės ir konservatyvesnės nei Orbison stiprumo (takumo) sąlygos. Tai galima paaiškinti tuo, kad AISC-LRFD yra projektavimą reglamentuojantis normatyvinis dokumentas. Tokiuose dokumentuose dažniausia priimama, kad konstrukcija dirba tampraus darbo ribose, kas užtikrina užsiduotą atsargos dydį. Apkrovų-poslinkių diagramų charakteriai ir jų palyginimas leidžia daryti išvadą, kad pagal konstrukcijos darbo duomenis, kurie gauti pagal aukščiau aprašytus tamprių plastinių geometriškai netiesinių rėmų analizės matematinius modelius, gaunami rezultatai yra labai artimi ankščiau kitų autorių atliktų darbų rezultatams.

2.5 lentelė. Dviejų aukštų rėmo plastinių lankstų susidarymą atitinkančių apkrovos faktorių palyginimas
Table 2.5. A comparison of plastic hinge load ratios for a two-story three-dimensional frame

Lankstų formavimosi eiliškumas	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Apkrovos faktorius (AISC-LRFD)	0,423	0,432	0,514	0,530	0,543	0,562	0,666	0,681
Apkrovos faktorius (Orbison)	0,740	0,754	0,822	0,889	0,918	0,943	0,945	0,965

Ribinių apkrovų reikšmių skaičiavimų rezultatai yra pateikti 2.6 lentelėje. Skirtumas tarp analizės uždavinio skaičiavimo taikant Orbisono stiprumo (takumo) sąlygas ir (Kim and Lee 2002) darbe pateiktų rezultatų sudarė nuo 13,5 % iki 21,5 %. Taikant AISC-LRFD normatyvinių dokumentų stiprumo (takumo) sąlygas – nuo 36,8 % iki 41,1 %. Tokie rezultatų skirtumai susidarė dėl to, kad (Kim *et al.* 2002) darbe yra labai tiksliai įvertinti visi nagrinėjamų plieno profilių geometrijos netikslumai ir fizinių parametrų skirtumai. Pavyzdžiui, takumo ribos vertikaliems elementams (Kim and Lee 2002) darbe yra pasirinktos tokios: skerspjūvio lentynų – 320 MPa, sienelės – 311 MPa. Horizontaliems elementams: lentynoms – 344 MPa, sienelėms 327 MPa. Šiame darbe pasirinktas idealizuotas konstrukcijos diskretinis modelis. Plieno profilių geometriniai ir fiziniai parametrai išlieka pastovūs per visą konstrukcijos elemento ilgį.

Pasirinktos konstrukcijos tampri plastinė analizė buvo atlikta pritaikius kompiuterinio matematinio skaičiavimo komplekso MATLAB optimizavimo uždavinių skaičiavimų paprogramę *Optimization Toolbox*. Skaitinio eksperimento komandinės bylos tekstas, sudarytas pagal MATLAB programavimo kalbos dėsningumus, yra pateiktas C priede.

2.6. lentelė. Jėgų ribinės reikšmės *A* ir *B* mazguose
Table 2.6. The limit forces values at *A* and *B* nodes

Mazgas	(Kim, Lee 2002) darbo rezultatų duomenys		Siūlomo matematinio modelio skaičiavimų rezultatų duomenys	
	Realios konstrukcijos bandymas	ABAQUS skaičiavimo rezultatai	Orbison stiprumo (takumo) sąlygos	AISC-LRFD stiprumo (takumo) sąlygos
I apkrovos variantas				
A	151,8 kN	151,5 kN	130,0 kN	95,0 kN
B	75,1 kN	75,7 kN	65,0 kN	47,5 kN
II apkrovos variantas				
A	169,5 kN	171,9 kN	144,5 kN	106,8 kN
B	84,7 kN	85,8 kN	73,0 kN	53,4 kN
III apkrovos variantas				
A	204,0 kN	198,1 kN	160,0 kN	120,0 kN
B	99,1 kN	101,9 kN	80,0 kN	60,0 kN

2.10. Antrojo skyriaus išvados

1. Įrodyta, kad matematinio programavimo teorijos ir mechanikos ekstreminių energinių principų junginys yra efektyvus nustatant tikrąjį ĮDB. Šio modelio realizavimas suvedamas į vienintelio ekstremumo suradimą nenagrinėjant plastinių lankstų susidarymo bei pradinio diskretinio modelio geometrijos pasikeitimų.

2. Apskaičiuotas sijos įlinkis panaudojant sukurtą analizės uždavinio matematinį modelį yra lygus 18,56 cm ir sutampa su etapiniu daug pastangų reikalaujančiu metodu. Tuo tarpu gauta ribinės apkrovos reikšmė yra 9 % didesnė.

3. Gautieji geometriškai netiesinės netamprios plastinės erdvinės konstrukcijos įrąžų ir poslinkių rezultatai palyginti su rezultatais gautais ABAQUS konstrukcijų analizės programa ir su eksperimentiniais realios konstrukcijos bandymo rezultatais. Taikant AISC-LRFD normatyvinių dokumentų reglamentuojamas stiprumo sąlygas konstrukcijų analizei, ribinės apkrovos reikšmės nuokrypis nuo reikšmių gautų konstrukciją modeliuojant ABAQUS programa bei atlikus realios konstrukcijos eksperimentinį bandymą, sudarė iki 41 %, o taikant Orbison stiprumo (takumo) sąlygas, nuokrypis sudarė apie 21 %. Todėl tolimesniems skaičiavimams buvo pasirenkamos Orbison stiprumo sąlygos.

3

Konstrukcijų optimizavimo uždavinys ribojant poslinkius

Skyriuje pateiktas pasiūlyto algoritmo trečiasis skaičiavimas-pakopa – konstrukcijos elementų skerspjūvių plotų optimizavimo uždavinys ribojant poslinkius. Pristatoma originali metodika tikrųjų konstrukcijos poslinkių apskaičiavimui. Pateikti skaičiavimai, kurie turi būti atlikti siekiant, kad konstrukcijos optimizavimo matematinio modelio panaudojimas būtų efektyvus, o gautų rezultatų konvergencija tiksli ir greita. Pateikiamas detalus pirmajame skyriuje pasiūlyto algoritmo vaizdas. Siūlomų metodikų efektyvumas pagrindžiamas skaitinio eksperimento rezultatais.

Skyriaus tematika paskelbtas vienas straipsnis (Popov *et al.* 2013). Rezultatai buvo pristatyti dvejose tarptautinėse mokslinėse konferencijose – „*Optimization and Analysis of Structures*“ 2011 m. Tartu, Estijoje, bei „*Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений“ („Золотовские чтения“)* vykusioje 2013 m. Maskvoje, Rusijoje.

3.1. Optimizavimo uždavinio ribojant poslinkius matematinis modelis

Konstrukcijos optimizavimo uždavinys ribojant poslinkius sprendžiamas atlikus dviejų pirmųjų siūlomo optimizavimo algoritmo pakopų, pristatytų antrajame skyriuje, skaičiavimus. Kitaip tariant, turint pilną informaciją apie konstrukcijos tikrąjį ĮDB, veikiant pasirinktai apkrovai.

Konstrukcijų optimizavimo uždavinio ribojant poslinkius bendras matematinis modelis užrašomas tokia išraiška:

Rasti
$$\min \; V\left(A_k\right), \tag{3.1}$$

kai
$$\mathbf{f}\left(\mathbf{S},\mathbf{S}_0\left(A_k\right)\right) \le \mathbf{1}, \tag{3.2}$$

$$u_t^- \le u_t\left(A_k\right) \le u_t^+, \tag{3.3}$$

$$A_k \ge A_k^{\min}, \tag{3.4}$$

$$t = 1,2,...,m_t,\; k = 1,2,...,s,$$

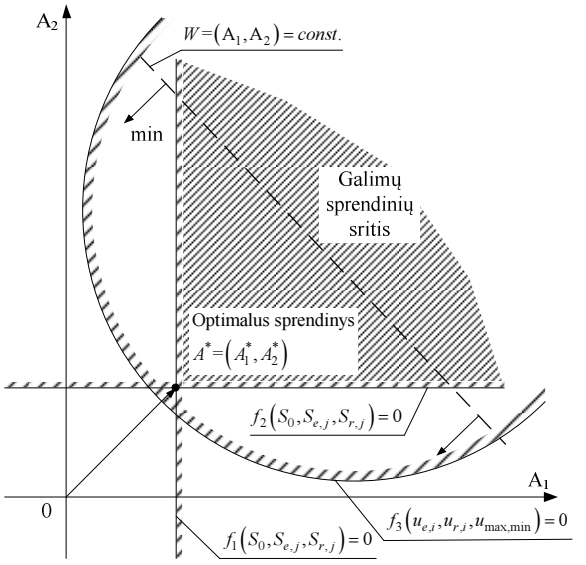
čia V – bendras suminis konstrukcijos elementų sudaromas tūris; A_k – konstrukcijos k-osios grupės elementų skerspjūvio plotas; u_t – skaičiuotinis konstrukcijos mazgo poslinkis t-ąja kryptimi; u_t^- ir u_t^+ – skaičiuotinės konstrukcijos mazgo poslinkio t-ąja kryptimi apatinė ir viršutinė riba; $A_k^{\min}$ – konstrukcijos k-osios grupės elementų skerspjūvio ploto apatinė riba; m_t – ribojamų poslinkių skaičius; s – konstrukcijos elementų skerspjūvių grupių skaičius.

Optimizavimo uždavinys (3.1)–(3.4) yra iškilas netiesinio matematinio programavimo uždavinys, turintis tik vieną ekstremumą (Karkauskas *et al.* 2009).

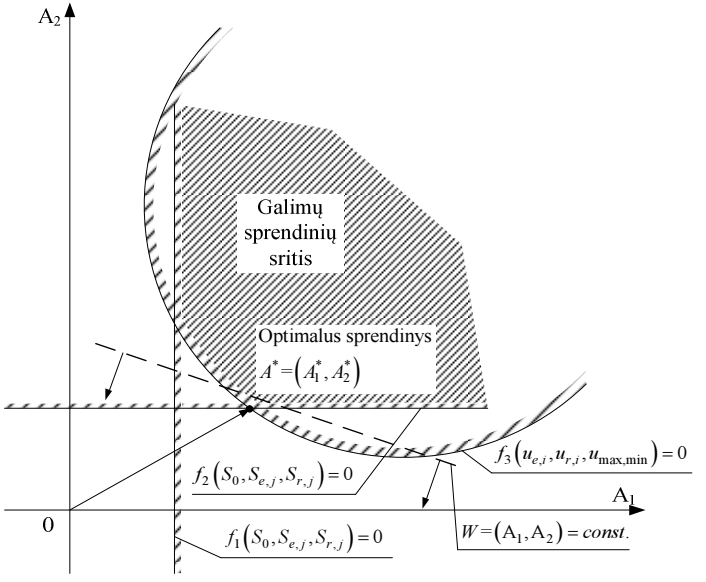
Galimi leistinos projektavimo srities bei sprendimo atvejai, kai yra du optimizuojami parametrai bei stiprumo sąlygos, išreikštos tiesinėmis funkcijomis (pavyzdžiui (2.93)), yra parodyti 3.1 ir 3.2 paveiksluose (Karkauskas *et al.* 2004).

3.1 paveiksle pavaizduotas optimalus sprendinys, kai poslinkių ribojimo sąlyga yra neaktyvi. Leistinųjų sprendinių sritis yra tiesinė. Optimizaciją apsprendžia konstrukcijos elementų stiprumo arba stabilumo sąlygos.

3.2 paveiksle pavaizduota leistinų sprendimų sritis, sudaryta ne vien tik iš stiprumo arba stabilumo sąlygų, bet taip pat ir iš poslinkių ribojimo sąlygų, kurios yra netiesinės. Šiuo atveju bent viena stiprumo sąlyga ir poslinkių apribojimų sąlyga optimalaus sprendinio taške turi būti patenkinta kaip lygybė.



3.1 pav. Optimizavimo uždavinio leistinų sprendinių sritis apribota tiesėmis
Fig. 3.1. The optimization problem feasible solutions' area bounded by lines



3.2 pav. Optimizavimo uždavinio leistinų sprendinių sritis yra netiesinė
Fig. 3.2. The optimization problem feasible solutions' area is nonlinear

Matematiniame modelyje (3.1)–(3.4) sąlygos (3.2) yra stiprumo sąlygos, kurios yra plačiai aptartos 2 skyriuje.

Efektyviam optimizavimo uždavinio (3.1)–(3.4) matematinio modelio panaudojimui ir siekiant gauti greitą sprendimo konvergenciją turi būti atlikti keturi svarbūs paruošiamieji skaičiavimai. Jie aprašomi tolesniuose disertacinio darbo skyriuose. Šios konvergencijos metodikos buvo sėkmingai pritaikytos skaičiuojant plokščias geometriškai tiesines konstrukcijas, pritaikymo rezultatai plačiai apžvelgti Atkočiūnas *et al.* 2010 darbe. Šios metodikos taikytinos ir netiesinių skaičiavimų atveju.

3.2. Konstrukcinių apribojimų parinkimas

Pirmasis iš aukščiau paminėtų skaičiavimų – konstrukcinių apribojimų (3.4) skerspjūvių plotų apatinių ribų $A_k^{\min}$ parinkimas. Tai galima padaryti išsprendus konstrukcijos optimizavimo uždavinį plastiškosios suirties etape, kurio matematinis modelis užrašomas taip:

$$\begin{aligned} &\text{Rasti} && V\left(A_k^{\min}\right) \to \min, \\ &\text{kai} && \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\left(A_k^{\min}\right)\right) \le \mathbf{1}, \\ & && \mathbf{A}_n \mathbf{S}_r = \mathbf{F} - \mathbf{A}_n \mathbf{S}_e, \\ & && A_k^{\min} \ge \mathbf{0},\ k = 1,2,...,s. \end{aligned} \tag{3.5}$$

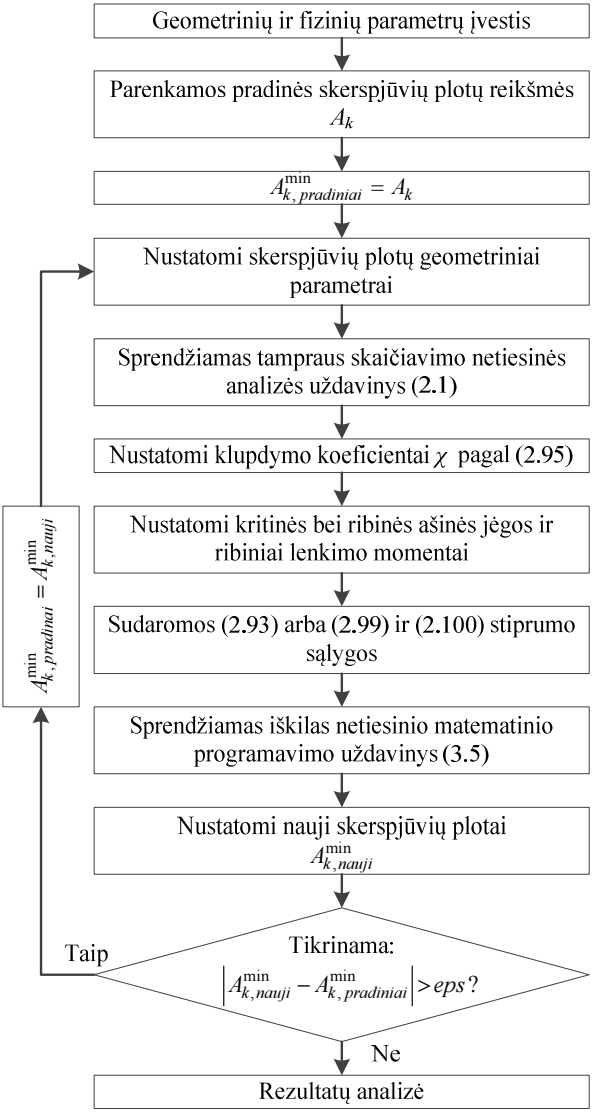
Šis uždavinys sprendžiamas iteraciniu būdu. Sprendimo algoritmas yra pateiktas 3.3 paveiksle. (3.1)–(3.4) uždavinio sprendimui, (3.5) uždavinio rezultatas yra taikomas, padauginus jį iš koeficiento 1,01, kitaip tariant paimamos optimizuojamų parametrų (šiuo atveju konstrukcijos elementų skerspjūvių plotų) reikšmės prieš pat konstrukcijos plastinį suirimą.

3.3. Poslinkių kitimo ribų parinkimas

Sekantis svarbus skaičiavimas, kuris turi būti atliktas prieš sprendžiant (3.1)–(3.4) optimizavimo uždavinį yra poslinkių (3.3) apribojimų apatinių u_t^- ir viršutinių u_t^+ ribų nustatymas. Čia sprendžiama keletas uždavinių, sujungiančių 1 ir 2 siūlomo optimizavimo algoritmo sprendimo pakopas (plačiai pristatytas 2 skyriuje). Panaudojant (3.5) optimizavimo uždavinio rezultatą – $A_k^{\min}$ ir redukuotą apkrovos vektorių $\tilde{\mathbf{F}} = \gamma_{red}\mathbf{F}$, (čia γ_{red} yra apkrovos redukcijos

koeficientas, artimas vienetui, bet ne didesnis) yra nustatomos poslinkių viršutinės apribojimų ribos $\mathbf{u}_{\max}=\mathbf{u}_e+\mathbf{u}_r$, konstrukcijai esant prieš pat plastinį suirimą:

$$u^{+}_{\max}, \text{kai}\, u_{\max} > 0, \text{arba}\, u^{-}_{\max}, \text{kai}\, u_{\max} < 0. \tag{3.6}$$



3.3 pav. Konstrukcijos optimizavimo plastiškos suirties metu uždavinio sprendimo algoritmas

Fig. 3.3. The optimization problem of structure being prior to plastic collapse solution algorithm

Toliau apskaičiuojami poslinkiai, kai konstrukcijoje susidaro pirmasis plastinis lankstas. Šie poslinkiai gaunami mažinant apkrovos redukcijos koeficientą ir sprendžiant 1 ir 2 siūlomo optimizavimo algoritmo sprendimo pakopų uždavinius. Gautos reikšmės yra apatinės poslinkių apribojimų reikšmės. $\mathbf{u}_{\min}=\mathbf{u}_e+\mathbf{u}_r$ yra poslinkiai atitinkantys tampriųjį atsaką:

$$u^{+}_{\min}, \text{kai}\, u_{\min} > 0, \text{arba}\, u^{-}_{\min}, \text{kai}\, u_{\min} < 0. \tag{3.7}$$

Svarbu paminėti, kad (3.1)–(3.4) optimizavimo uždaviniui parinkti poslinkių apribojimų sąlygų dydžiai u_t^- ir u_t^+ turi patekti tarp šių ribinių reikšmių:

$$\begin{aligned} &\text{kai}\, \mathbf{u}^{+} > 0, \text{tai}\, \mathbf{u}^{+}_{\min} \le \mathbf{u}^{+} \le \mathbf{u}^{+}_{\max}, \\ &\text{kai}\, \mathbf{u}^{-} < 0, \text{ tai}\, \mathbf{u}^{-}_{\min} \ge \mathbf{u}^{-} \ge \mathbf{u}^{-}_{\max}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Tokiu būdu nustatyti poslinkių apribojimai užtikrina konstrukcijos darbą, esant tampriai plastinei būsenai ir optimizacija atliekama pagal (3.1)–(3.4). Jei šie apribojimai yra pažeisti, optimizavimo uždavinys neturi sprendinio.

3.4. Optimizavimo uždavinio ribojant poslinkius pradinio taško parinkimas

Trečiasis aukščiau minėtas skaičiavimas yra pradinių skerspjūvių plotų dydžių parinkimas optimizavimo uždaviniui (3.1)–(3.4). Čia sprendžiama keletas uždavinių, apjungiančių pirmą ir antrą siūlomo optimizavimo algoritmo sprendimo pakopas (plačiai pristatytas 2 skyriuje), tokiu būdu keičiamos $A_{k,start}$ reikšmės, kol galiausiai gautos poslinkių reikšmės yra didesnės už tampraus atsako poslinkius ir mažesnės už poslinkius konstrukcijai esant prieš pat plastinį suirimą, tai yra turi tenkinti šias nelygybes:

$$\begin{aligned} &\text{kai}\, \mathbf{u} > 0, \text{tai}\, \mathbf{u}^{+}_{\min} \le \mathbf{u} \le \mathbf{u}^{+}_{\max}, \\ &\text{kai}\, \mathbf{u} < 0, \text{ tai}\, \mathbf{u}^{-}_{\min} \ge \mathbf{u} \ge \mathbf{u}^{-}_{\max}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.5. Poslinkių skaičiavimas

Ketvirtasis skaičiavimas – tai nustatyti tikrųjų poslinkių, priklausančių nuo optimizuojamų parametrų – konstrukcijų elementų skerspjūvių plotų, reikšmes (3.3) poslinkių apribojimams. Šie poslinkiai yra nustatomi iteracinio skaičiavimo metu naudojant rezultatus gautus pirmų dviejų pakopų-uždavinių sprendimo metu. Konstrukcijos poslinkiai *t*-ąja kryptimi apskaičiuojami pagal formulę:

$$u_t = \sum_{k=1}^{s} \mathbf{u}_{t,k} \tilde{\mathbf{k}}_{\tau,k} \bar{\mathbf{u}}_{t,k} \,, \tag{3.10}$$

čia $\mathbf{u}_{t,k}$ yra k-ojo elemento mazginių taškų tikrųjų globalių poslinkių vektorius t-ąja kryptimi, gautas atlikus tampraus skaičiavimo netiesinės analizės (2.1) ir geometriškai netiesinių tamprių plastinių konstrukcijų analizės ((2.77) arba (2.82)) uždavinių skaičiavimus; $\tilde{\mathbf{k}}_{\tau,k}$ yra elemento tangentinė standumo matrica, jungianti ieškomus skerspjūvių plotus A_k; $\bar{\mathbf{u}}_{t,k}$ yra k-ojo elemento globaliųjų poslinkių vektorius, apskaičiuotas nuo vienetinės jėgos, pridėtos ribojamo poslinkio kryptimi.

Svarbu paminėti, kad (3.10) konstrukcijos globalinė standumo matrica sudaroma iš atskirų baigtinių elementų tangentinių standumo matricų $\tilde{\mathbf{k}}_{\tau,k}$, įvertinus visus pradinės konstrukcijos pasikeitimus pagal tikrąjį ĮDB nuo pasirinktos apkrovos (keičiamas konstrukcijos diskretinis modelis, papildant jį susidariusiais plastiniais lankstais, bei keičiamos pradinės konstrukcijos mazgų koordinatės). Poslinkių vektorius $\bar{\mathbf{u}}_{t,k}$ apskaičiuojamas, įvertinus visus aukščiau minėtus pasikeitimus konstrukcijoje pagal tikrąjį ĮDB. Tokiu būdu aprašyta tikrųjų poslinkių nustatymo procedūra leidžia (3.10) formulės dešinėje pusėje, pagrindinius uždavinio (3.1)–(3.4) nežinomuosius A_k išskirti kaip atskirus daugiklius.

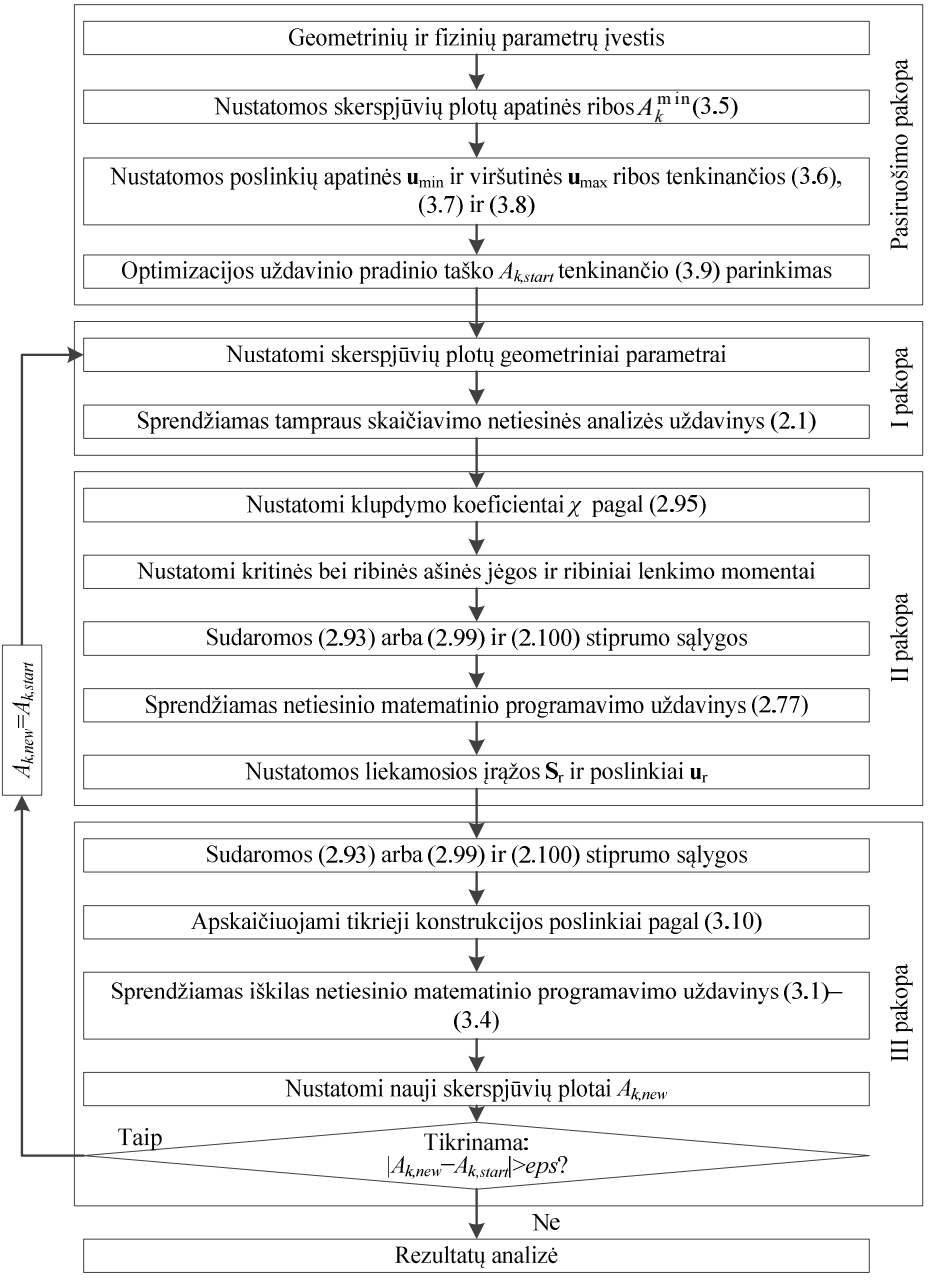
3.6. Optimizavimo uždavinio sprendimo išplėstinis algoritmas

Sujungiant visus aukščiau aptartus skaičiavimus siūlomas optimizavimo uždavinio (1.7) sprendimo algoritmas, pavaizduotas 1.3 paveiksle, gali būti išplėstas, kaip tai yra parodyta 3.4 paveiksle.

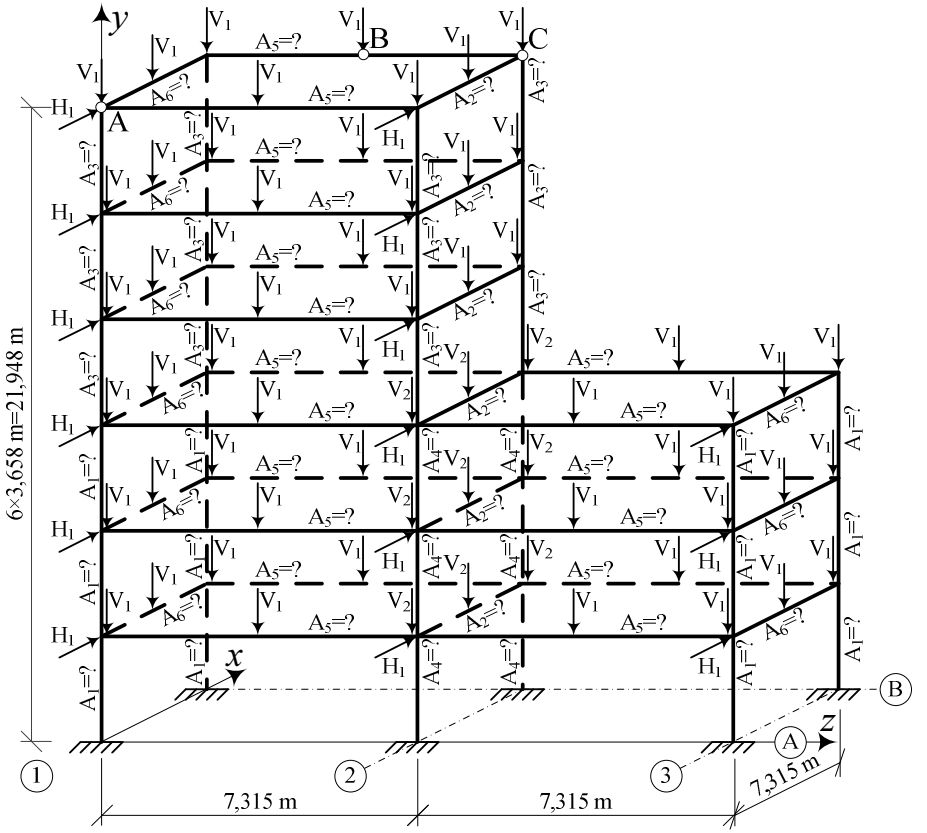
3.7. Skaitinė realizacija

Optimizavimo uždavinio skaičiavimui sukurto algoritmo (3.4 pav.) galimybes atskleisime optimizuodami šešių aukštų erdvinio plieninio rėmo, pateikto 3.5 paveiksle, strypų skerspjūvių parametrus.

Nagrinėjamo rėmo geometrija, pridėtų vertikalių ir horizontalių jėgų pasiskirstymas yra pateiktas 3.5 paveiksle: V_1=64,229 kN, V_2=128,457 kN ir H_1=53,376 kN. Konstrukcijos elementų skerspjūvių plotai yra suskirstyti į 6 grupes (3.5 pav.). Visų trijų pirmų aukštų kampinių kolonų skerspjūvio plotas yra A_1.



3.4 pav. Siūlomo optimizavimo uždavinio sprendimo išplėstinis algoritmas
Fig. 3.4. The extensive suggesting solution algorithm of optimization problem



3.5 pav. Šešių aukštų erdvinis rėmas
Fig. 3.5. The six-story three-dimensional frame

Visų sijų esančių „2“ ašyje skerspjūvio plotas yra A_2 . Ketvirto, penkto ir šešto aukštų kampinių kolonų skerspjūvio plotas yra A_3. Visų trijų pirmų aukštų kolonų esančių „2“ ašyje skerspjūvio plotas yra A_4. Visų sijų lygiagrečių „x“ ašiai skerspjūvio plotas yra A_5. Visų kraštinių sijų lygiagrečių „z“ ašiai skerspjūvio plotas yra A_6.Nagrinėjamo rėmo geometrija, pridėtų vertikalių ir horizontalių jėgų pasiskirstymas yra pateiktas 3.5 paveiksle: V_1=64,229 kN, V_2=128,457 kN ir H_1=53,376 kN. Konstrukcijos elementų skerspjūvių plotai yra suskirstyti į 6 grupes (3.5 pav.). Visų trijų pirmų aukštų kampinių kolonų skerspjūvio plotas yra A_1. Visų sijų esančių „2“ ašyje skerspjūvio plotas yra A_2 . Ketvirto, penkto ir šešto aukštų kampinių kolonų skerspjūvio plotas yra A_3. Visų trijų pirmų aukštų kolonų esančių „2“ ašyje skerspjūvio plotas yra A_4. Visų sijų lygiagrečių „x“ ašiai skerspjūvio plotas yra A_5. Visų kraštinių sijų lygiagrečių „z“ ašiai skerspjūvio plotas yra A_6.

Mazgo „A“ (3.5 pav.) poslinkis teigiama *x* ašies kryptimi neturi viršyti 19 cm bei mazgo „B“ (3.5 pav.) poslinkis neigiama *y* ašies kryptimi neturi viršyti – 5,5 cm.

Rėmo medžiagos (plieno) fiziniai parametrai – takumo riba f_u=250 MPa, tamprumo modulis E=206,85 GPa.

Rėmo diskretinį modelį, pateiktą 3.5 paveiksle, sudaro 69 mazgai, turintys 378 laisvumo laipsnius, ir dviejų tipų elementai – 30 kolonų tipo elementų ir 66 sijinio tipo elementai. Visi elementai konstrukcijoje yra vertinami kaip tempiami, gniuždomi, sukami bei lenkiami dvejose ašyse. Tokiu būdu, bendras įrąžų skaičius yra 576.

3.1 lentelė. „W“ tipo profilių geometrinių rodiklių santykio koeficientai
Table 3.1. Relation coefficients of geometrical parameters for W profiles

Skerspjūvio geometriniai rodikliai	Koeficientas *a*	Koeficientas *b*
I_y	5,0783	1,8281
I_z	0,5567	1,7919
I_t	0,0025	2,2255
$W_{pl,y}$	2,1162	1,4142
$W_{pl,z}$	0,4960	1,4101
W_t	0,0302	1,5856
$W_{e,y}$	1,9757	1,4015
$W_{e,z}$	0,3239	1,4078

Siūlomo optimizavimo algoritmo skaitinei realizacijai reikalingas santykis tarp elementų skerspjūvio ploto ir kitų elementų skerspjūvių geometrinių parametrų (Atkočiūnas *et al.* 2010):

$$Z_k = aA_k^b, \tag{3.11}$$

čia Z_k – konstrukcijos *k*-osios grupės elementų skerspjūvių geometrinis parametras (inercijos momentas, plastinis atsparumo momentas ir pan.); *a* ir *b* yra santykio koeficientai.

Rėmas yra projektuojamas iš „W“ tipo dvitėjių profiliuočių, atitinkančių Amerikos standartą (ASTM Standard A6/A6M). Šių profiliuočių geometrinių parametrų santykių koeficientai, apskaičiuoti pagal (3.11) formulę, yra pateikti 3.1. lentelėje.

Trumpai aptarsime optimizuojamo rėmo konstrukcijos deformatyvumo apribojimus. Optimizuojamų parametrų – skerspjūvių plotų – apatines ribas gauname rėmo optimizavimo prie plastinio suirimo uždavinio (3.5) sprendinio.

3.2 lentelė. Šešių aukštų erdvinio rėmo optimizavimo prie konstrukcijos plastinio suirimo uždavinio rezultatai
Table 3.2. Six story space frame optimization prior to structure's plastic collapse problem results

Iteracija	A_1, cm^3	A_2, cm^3	A_3, cm^3	A_4, cm^3	A_5, cm^3	A_6, cm^3	V, m^3
0	*100,0000*	*100,0000*	*100,0000*	*100,0000*	*100,0000*	*100,000*	*3,51168*
1	113,2130	120,9100	69,6722	128,3110	30,2495	112,9014	2,7569
2	145,3833	112,4464	82,7808	165,2700	29,7222	104,4194	2,9368
...	…	…	…	…	…	…	…
5	136,9136	112,5021	95,2354	154,8109	29,4146	105,5109	2,9347
6	135,2542	112,5077	96,5649	153,6516	29,4167	105,7227	2,9322
7	*135,8320*	*112,4600*	*96,7482*	*153,9854*	*29,4263*	*105,5612*	*2,9351*

Rezultatas, pagal pasirinktą 0,1 % optimalumo kriterijaus tikslumą, buvo pasiektas po 7 iteracijų. Skerspjūvių reikšmių kitimo dinamika ir galutinis rezultatas yra pateikti 3.2 lentelėje. Esant konstrukcijos elementų skerspjūvių plotų reikšmėms pateiktoms eilutėje pažymėtoje numeriu „7“ ir apkrovos redukcijos faktoriui γ_{red}=0,99 yra sprendžiamos siūlomo optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmo dvi pirmosios pakopos ir nustatomos rėmo poslinkių viršutinės ribos (poslinkių dydžiai, kai prasideda konstrukcijos plastinis irimas):

taško „A“ horizontalus poslinkis x ašies teigiama kryptimi (3.5 pav.)

$$u_{A,x,\max} = u_{eA,x} + u_{rA,x} = 17,7310 + 5,3355 = 23,0665 \text{ cm},$$

taško „B“ vertikalus poslinkis y ašies neigiama kryptimi (3.5 pav.)

$$u_{B,y,\max} = u_{eB,\mathrm{y}} + u_{rB,\mathrm{y}} = -4,8489 - 2,0112 = -6,8601 \text{ cm}.$$

Sumažinę apkrovos faktorių γ_{red}=0,8 ir išsprendę siūlomo optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmo dvi pirmąsias pakopas, nustatome poslinkių reikšmes, atitinkančias rėmo pirmojo plastiškojo lanksto susidarymą:

$$u_{A,x,\min} = u_{e\,A,x} + u_{r\,A,x} = 14,1062 + 0,1946 = 14,3008 \text{ cm},$$
$$u_{B,y,\min} = u_{e\,B,y} + u_{r\,B,y} = -3,8614 - 0,0087 = -3,8701 \text{ cm}.$$

Tai yra rėmo poslinkių kitimo apatinės ribos. Taigi uždavinio sąlygose priimtos mazgų poslinkių kitimo ribos yra tarp šių kraštinių ribų:

$$14,3008\text{cm} < u_{A,x} = 19\text{cm} < 23,0665 \text{ cm},$$
$$-3,8701\text{cm} < u_{B,y} = -5,5\text{cm} < -6,8601 \text{ cm},$$

ir tai užtikrina konstrukcijos tamprų-plastinį darbą.

3.3 lentelė. Šešių aukštų erdvinio rėmo optimizavimo uždavinio sprendimas naudojant siūlomą algoritmą
Table 3.3. The Six-story three-dimensional frame optimization problem solution by suggesting algorithm

Iteracija	A_1, cm^3	A_2, cm^3	A_3, cm^3	A_4, cm^3	A_5, cm^3	A_6, cm^3	V, m^3
0	*142,6236*	*134,7665*	*104,2538*	*161,6846*	*36,8370*	*152,0807*	*3,5166*
1	142,6236	113,5846	100,4277	161,6846	33,1045	106,6168	3,0583
2	157,5593	222,3721	138,6120	161,6846	32,8155	176,6903	4,2266
...	…	…	…	…	…	…	…
5	155,4948	113,5846	103,4990	161,6846	32,8614	132,7849	3,2974
6	155,4948	113,5846	103,4990	161,6846	32,6026	106,6168	3,1217
7	155,4948	113,5846	103,4990	161,6846	32,5632	128,3795	3,2645
(Kim *et al.* 2001)	W12x87	W12x87	W10x60	W12x120	W12x26	W12x53	
	165,1	*165,1*	*114,1*	*227,7*	*49,41*	*100,5*	*3,7625*

Optimizavimo iteracijų procesui parinktos pradinės elementų skerspjūvių plotų reikšmės yra 5 % didesnės už skerspjūvių plotų reikšmes, gautas konstrukcijai pasiekus plastinį suirimą. Skerspjūvių plotų reikšmės yra pateiktos 3.3 lentelės eilutėje pažymėtoje „0“. Pasirinkus šias skerspjūvių plotų reikšmes, kaip pradinį iteracinio skaičiavimo tašką, ir išsprendus siūlomo optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmo dvi pirmąsias pakopas, gauname pradines ribojamų poslinkių reikšmes, tenkinančias būtinąsias sąlygas (3.9):

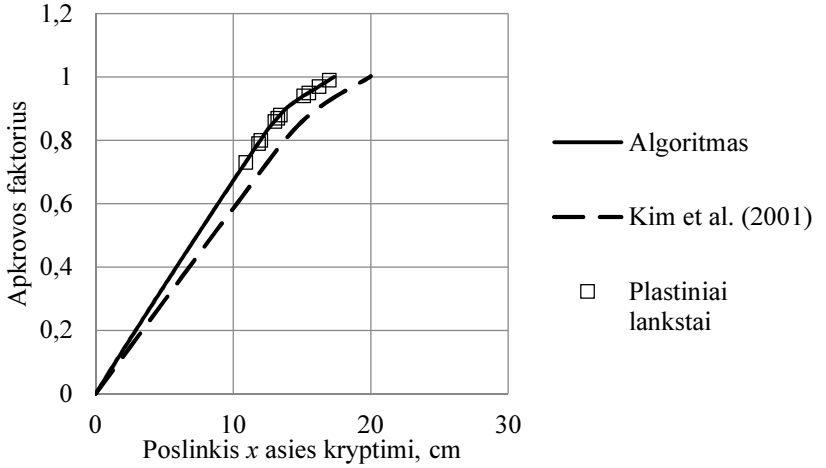
$$14{,}3008\,\text{cm} < u_{A,x}^{pr.} = 22{,}9039\,\text{cm} < 23{,}0665\ \text{cm},$$

$$-3{,}8701\,\text{cm} < u_{B,y}^{pr.} = -6{,}2127\,\text{cm} < -6{,}8601\ \text{cm}.$$

Atlikus nagrinėjamo rėmo iteracinį skaičiavimą, pasirinkto 5 % optimalumo kriterijaus tikslumo optimalus projektas buvo gautas po 7 iteracijų. Projektuojamų parametrų kitimo dinamika optimizavimo iteracinio proceso metu yra pateikta 3.3 lentelėje. Gautas optimalus rėmo projektas yra užrašytas 7 numeriu pažymėtoje lentelės eilutėje.

Išanalizavus gautus rezultatus, galima teigti, kad pasirinktos ribinės poslinkių reikšmės turi įtaką optimizavimo procesui, nes esant optimaliam projektui šios reikšmės yra ribinės arba artimos joms. Poslinkis $u_{A,x}$=13,8669 cm, o tai yra mažiau už pasirinktą ribinę reikšmę 19 cm; poslinkis $u_{B,y}$=–4,2459 cm yra didesnis už pasirinktą ribinę reikšmę –5,5 cm.

Kim *et al.* (2001) darbe buvo atlikta 3.5 paveiksle pateikto rėmo analizė. Šiame darbe rėmas buvo modeliuojamas iš standartinių W tipo dvitėjų profiliuočių, kurių pasiskirstymas yra pateiktas 3.3 lentelės paskutinėse dvejose eilutėse. Rėmo fiziniai parametrai Kim *et al.* (2001) darbe pasirinkti tokie patys kaip ir aukščiau aprašytieji optimizavimo uždaviniui spręsti.



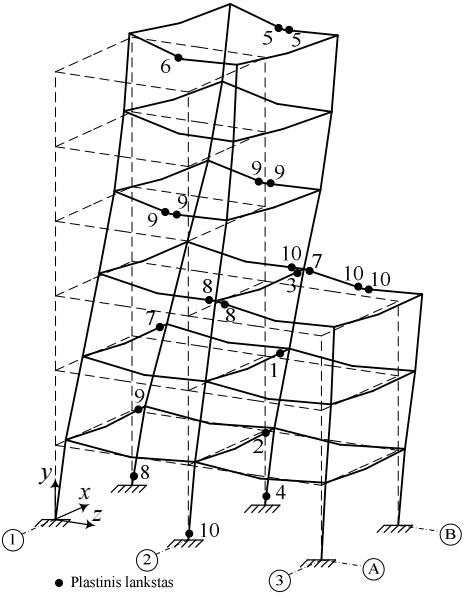
3.7 pav. C taško poslinkio priklausomybė nuo apkrovos redukcijos faktoriaus
Fig. 3.7. C point horizontal displacement's dependence on load reduction coefficient value

Siekiant palyginti gautus rėmų analizės rezultatus su Kim *et al.* (2001) darbe gautais rezultatais, buvo sudaryti mazgo „C" (3.7 pav.) horizontalaus poslinkio teigiamos *x* ašies kryptimi priklausomybių nuo apkrovos redukcijos faktoriaus grafikai, kurie pateikti 3.7 paveiksle. Optimalaus projekto, gauto pagal pasiūlytą algoritmą, konstrukcijos „C" mazgo poslinkio reikšmė apkrovos faktoriui pasiekus maksimalų dydį yra lygi 17,33 cm, o tai yra 13,35 % mažiau, nei Kim *et al.* (2001) darbe gauta 20 cm reikšmė. Pažymėtina, kad toks mazgo „C" poslinkio rezultatas yra gautas optimalios konstrukcijos medžiagos tūriui (3,2645 m^3) esant 13,23 % mažesniam nei Kim *et al.* (2001) darbe (3,7625 m^3).

Optimalios konstrukcijos analizė taipogi leido nustatyti plastinių lankstų susidarymo vietas, kurios pavaizduotos 3.6 paveiksle bei eiliškumą didinant apkrovos faktorių (3.4 lentelė). Pažymėtina, kad eilinio plastinio lanksto susidarymas konstrukcijos elementuose įtakoja poslinkius didinant apkrovos faktorių, apie tai galima spręsti iš 3.7 paveiksle pateiktos diagramos.

3.4 lentelė. Plastinių lankstų susidarymo eiliškumas esant optimaliam rėmo projektui
Table 3.4. The sequence of the plastic hinge occurrence for structure's optimal project

Eiliškumas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Apkrovos faktorius	0,73	0,79	0,80	0,86	0,87	0,88	0,94	0,95	0,97	0,99



3.6 pav. Šešių aukštų erdvinio rėmo optimalaus projekto deformavimosi bei plastinių lankstų susidarymo vietų schema
Fig. 3.6. The six-story three-dimensional frame deformations and plastic hinge occurrence places schema

Pasirinktos konstrukcijos optimizavimo uždavinio ribojant poslinkius sprendimas bei paruošiamieji skaičiavimai buvo atlikti pritaikius kompiuterinio matematinio skaičiavimo komplekso MATLAB optimizavimo uždavinių skaičiavimų paprogramę *Optimization Toolbox*. Skaitinio eksperimento komandinių bylų tekstai, sudaryti pagal MATLAB programavimo kalbos dėsningumus, yra pateikti prieduose D, E ir F.

3.8. Trečiojo skyriaus išvados

1. Suformuluotas konstrukcijų optimizavimo uždavinio ribojant poslinkius matematinis modelis. Įrodyta, kad tai yra iškilojo matematinio programavimo optimizavimo uždavinys, turintis globalųjį ekstremumą.

2. Panaudojant baigtinių elementų metodą sudarytos poslinkių apribojimų sąlygų analitinės išraiškos.

3. Atlikto skaitinio eksperimento metu gautieji optimalios konstrukcijos poslinkiai neviršija pasirinktų ribinių reikšmių, o viršutinio mazgo poslinkio reikšmė yra 13,35 % mažesne nei kitų autorių (Kim *et al.* (2001)) gauta reikšmė. Pažymėtina, kad gautas optimalios konstrukcijos medžiagos tūris yra 13,23 % mažesnis nei Kim *et al.* (2001) darbe nagrinėjamos konstrukcijos.

Bendrosios išvados

1. Konstrukcijų deformuoto būvio geometriškai netiesinė elgsena bei medžiagų plastinės savybės turi būti įvertintos norint, kad skaičiavimas atitiktų realias konstrukcijų darbo sąlygas.

2. Matematinio programavimo teorijos ir mechanikos ekstreminių energinių principų junginys yra efektyvus sudarant naujus geometriškai netiesinių tamprių plastinių statybinių strypinių konstrukcijų skaičiavimo ir optimizavimo uždavinių matematinius modelius.

3. Panaudojant sukurto geometriškai netiesinių tamprių plastinių konstrukcijų analizės uždavinio matematinį modelį galima tiksliai nustatyti konstrukcijos tikrojo įtempto deformuoto būvio dydžius. Geriausiai šis rezultatas pasiekiamas matematiniame modelyje naudojant Orbison stiprumo (takumo) sąlygas.

4. Panaudojus sudarytą optimizacijos uždavinio sprendimo algoritmą, skaitinio eksperimento metu gauti optimalios konstrukcijos mazgų poslinkiai 13,35 % mažesni už Kim *et al.* (2001) darbe pateikiamas reikšmes. Pažymėtina, kad gautas optimalios konstrukcijos medžiagos tūris yra 13,23 % mažesnis už Kim *et al.* (2001) darbe nagrinėjamos konstrukcijos. Tai leidžia taupyti medžiagas ir išteklius projektavimo ir gamybos stadijose.

Literatūra ir šaltiniai

Aminmansour, A. 2000. A New Approach to Design of Steel Beam-Columns, *Engineering Journal* 37(2): 41–72.

ANSI/AISC 360-10: Specification for Structural Steel Buildings. 612 p.

Arora, J. S.; Haug, E. J. 1979. Methods of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization, *AIAA Journal* 17: 970–974.

Asghar Bhatti, M. 2005. *Fundamental Finite Element Analysis and Applications: with Mathematica and Matlab Computations.* Wiley. 720 p.

Ashley, H. 1982. On Making Things the Best – Aeronautical Uses of Optimization, *Journal of Aircraft* (19)1: 5–28.

ASTM Standard A6/A6M: Standard Specification for General Requirements for Rolled Structural Steel Bars, Plates, Shapes, and Sheet Piling. ASTM International, West Conshohocken, 2013.

Atkočiūnas, J. 2011. *Optimal shakedown design of elastic-plastic structures*. Vilnius: Technika, 300 p.

Atkočiūnas, J.; Čižas, A. E. 2009. *Netamprių konstrukcijų mechanika*. Vilnius: Technika, 268 p.

Atkočiūnas, J.; Karkauskas, R. 2010. *Tampriųjų plastinių strypinių konstrukcijų optimizavimas*. Vilnius: Technika, 376 p.

Atkočiūnas, J.; Merkevičiūtė, D.; Venskus, A. 2008. Optimal shakedown design of bar systems: Strength, stiff ness and stability constraints, *Computers & structures* 86(17–18): 1757–1768.

Atkočiūnas, J.; Nagevičius, J. 2004. *Tamprumo teorijos pagrindai*. Vilnius: Technika. 528 p.

Aydoğdu, İ.; Saka, M.P. 2012. Ant colony optimization of irregular steel frames including elemental warping effect, *Advances in Engineering Software* 44 (1): 150–169.

Barauskas, R. 1998. *Baigtinių elementų metodo pagrindai.* Kaunas: Technologija. 375 p.

Barauskas, R.; Belevičius, R.; Kačianauskas, R. 2004. *Baigtinių elementų metodo pagrindai.* Vilnius: Technika. 612 p.

Baušys R. B.; Karkauskas R. P. 1987. Tamprių-plastiškų rėmų optimizacija, esant standumo apribojimams. *Lietuvos mechanikos rinkinys* 29: 33–43 (rusų k.).

Belytscho, T.; Liu, W. 2000. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & Sons Ltd. 300 p.

Bofang, Z.; Zhanmei, L. 1981. Optimization of Double-Curvature Arch Dams, *Chinese Journal of Hydraulic Engineering* 2: 11–21 (kinų kalba).

Brockenbrough, R. L.; Merritt, F. S. 2006. *Structural Steel Designer's Handbook: AISC, AASHTO, AISI, ASTM, AREMA, and ASCE-07 Design Standards.* The McGraw-Hill. 959 p.

Chapra, S. C. 2006. *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*. McGraw-Hill. 608 p.

Chen, H. F.; Liu, Y. H.; Cen, Z. Z.; Xu, B. Y. 1999. On the Solution of Limit Load and Reference Stress of 3-D Structures under Multi-Loading Systems, *Engineering Structures* 21: 530–537.

Chiorean C. G.; Barsan G. M. 2005. Large deflection distributed plasticity analysis of 3D steel frameworks, *Computers and Structures* 83: 1555–1571.

Čyras, A. 1983. *Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures.* Ellis Horwood Limited, 121 p.

Čyras, A.; Borkowski, A.; Karkauskas, R. 2004. *Theory and methods of optimization of rigid-plastic systems.* Vilnius: Technika, 354 p.

Dantzig, G. B. 1949. Programming in a linear structure, *Econometrica* 17: 73–74.

Doğan, E.; Saka, M.P. 2012. Optimum design of unbraced steel frames to LRFD–AISC using particle swarm optimization, *Advances in Engineering Software* 46 (1): 27–34.

Eurocode 3: Design of Steel Structures. Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings. Brussels, 2006.

Ferreira, A. J. M. 2009. *MATLAB Codes for Finite Element Analysis*. Springer. 236 p.

Fiacco, A. V.; McCormick, G. P. 1968. *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques*. John Wiley and Sons, 210 p.

Fleury, C.; Sanders, G. 1977. Relations Between Optimality Criteria and Mathematical Programming in Structural Optimization, in *Proceedings of the Symposium on Applications of Computer Methods in Engineering*, 507–520.

Fox, R. L. 1965. Constraint Surface Normals for Structural Synthesis Techniques, *AIAA Journal* 3(8): 1517–1518.

Gabriel, G. A.; Ragsdell, K. M. 1977. The generalized reduced gradient method: a reliable tool for optimal design, *ASME Journal of Engineering for Industry* 99 (2): 394–400.

Gallatly, R. A.; Berke, L.; Gibson, W. 1971. The Use of Optimality Criteria in Automated Structural Design, presented at *the 3rd Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*.

Hager, W.W.; Hearn, D. W.; Pardalos, P. M. 1994. *Large Scale Optimization: State of the Art.* Kluwer Academic Publishers, 462 p.

Hajela, G. 1990. Genetic Search – An Approach to the Nonconvex Optimization Problem, *AIAA Journal* 26(7): 1205–1210.

Hasançebi, O.; Kazemzadeh Azad, S. 2012. An exponential big bang-big crunch algorithm for discrete design optimization of steel frames, *Computers & Structures* 110–111: 167–179.

Haug, E. J.; Choi, K. K.; Komkov, V. 1986. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems.* Academic press, 381 p.

Hayalioglu, M. S. 2000. Optimum design of geometrically nonlinear elastic-plastic steel frames via genetic algorithm, *Computers & Structures* 77: 527–538.

Heyman, J. 1956. Plastic Design of Beams and Frames for Minimum Material Consumption, *Quarterly of Applied Mathematics* 8: 373–381.

Kalanta, S. 2007. *Taikomosios optimizacijos pagrindai.* Vilnius: Technika, 480 p.

Kalanta, S. 1997. New formulations of optimization problems of elasto-plastic bar structures under displacements constraints, *Mechanika* 4(11): 11–16.

Karkauskas, R. 1997. Analysis of non-holonomic behaviour of geometrically nonlinear elastic-plastic framed structures, *Mechanika* 4(11): 24–30.

Karkauskas, R. 1998. Tampriai plastinių geometriškai netiesinių strypinių konstrukcijų analizė, *Statyba* [Civil Engineering] 4(4): 36–42.

Karkauskas, R. 2004. Optimization of Elastic-Plastic Geometrically Nonlinear Light-Weight Structures under Stiff ness and Stability Constraints, *Journal of Civil Engineering and Management* 10(2): 97–106.

Karkauskas, R.; Krutinis, A.; Atkočiūnas, J.; Kalanta, S.; Nagevičius, J. 1995. *Statybinės mechanikos uždavinių sprendimas kompiuteriais*. Vilnius: Mokslo ir enciklopedijų leidykla, 1995. 264 p.

Kaveh, A.; Talatahari S. 2010. An improved ant colony optimization for the design of planar steel frames, *Engineering Structures* 32: 864–873.

Kim S.-E.; Kang K.-W. 2002. Large-scale testing of space steel frame subjected to non-proportional loads, *International Journal of Solids and Structures* 39: 6411–6427.

Kim S.-E.; Kang K.-W., Lee D.-H. 2003. Full-scale testing of space steel frame subjected to proportional loads, *Engineering Structures* 25: 69–79.

Kim, I. Y.; Kwak, B. M. 2002. Design space optimization using a numerical design continuation method, *International journal for numerical methods in engineering* 53: 1979–2002.

Kim S.-E.; Lee D.-H. 2002. Second-order distributed plasticity analysis of space steel frames, *Engineering Structures* 24: 735–744.

Kim, S.-E.; Park, M.-H.; Choi, S.-H. 2001. Direct design of three-dimensional frames using practical advanced analysis, *Engineering Structures* 23(11): 1491–1502.

Kelley, J. E. 1960. The cutting plane method for solving convex programs, *Journal of SIAM*, 8: 702–712.

Klein, B. 1955. Direct use of extremal principles in solving certain optimization problems involving inequalities, *Journal of the operations research society of america* 3: 168–175.

Kwon, Y. W.; Bang, H. 2000. *The Finite Element Method Using MATLAB*. CRC Press. 624 p.

Levy, M. 1874. *La statique graphique et ses applications aux constructions*. Paris: Gauthier-Villars. 323 p.

Li, G.-Q.; Li, J.-J. 2007. *Advanced analysis and design of steel frames*. John Wiley & Sons Inc. 384 p.

Myers, R. H.; Montgomery, D. C.; Anderson-Cook, C. M. 2009. *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments.* John Wiley & Sons, 704 p.

MathWorks Inc. 2012. *MATLAB ver. 7.14.0.739 (R2012a) software documentation*.

Merkevičiūtė, D.; Atkočiūnas, J. 2003. Incremental Method for Unloading Phenomenon Fixation at Shakedown, *Journal of Civil Engineering and Management* 9(3): 178–191.

Michell, A. G. M. 1904. The Limits of Economy of Material in Frame Structures, *Philosophical Magazine* 8 (47): 589–597.

Nemhauser, G. L.; Wolsey, L. A. 1988. *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons, 763 p.

Palm, W. J. III. 2010. *Introduction to MATLAB for engineers*. McGraw-Hill. 704 p.

Polyanin, A. D.; Manzhirov, A. V. 2007. *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists.* Chapman & Hall/CRC Press, 1543 p.

Prager, W.; Taylor, J. E. 1968. Problems in Optimal Structural Design, *Journal of Applied Mechanics* 35(1): 102–106.

Quarteroni, A.; Saleri, F.; Gervasio, P. 2010. *Scientific Computing with MATLAB and Octave.* Springer. 366 p.

Rajan, S. D.; Nguyen, D. T. 2004. Design optimization of discrete structural systems using MPI-enabled genetic algorithm, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 27 (1–9): 340–348.

Rao, S. S. 2009. *Engineering optimization: theory and practice*. John Wiley & Sons, Inc. 840 p.

Reddy, J. N. 2004. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis.* Oxford University Press. 488 p.

Reddy, J. N. 2005. *An Introduction to the Finite Element Method.* McGraw-Hill. 776 p.

Rockafellar, R. T.; 1973. The multiplier method of hestines and powell applied to convex programming, *Journal of optimization theory and applications* 12(6): 555–562.

Saka M. P.; Hayalioglu, M. S. 1991. Optimum design of geometrically nonlinear elastic-plastic steel frames. *Computers & structures* 38(3): 329–344.

Saka, M.; Kameshki, E. 1998. Optimum design of unbraced rigid frames, *Computers & Structures* 69: 433–442.

Saouma, V. E. 2000. *Finite element I. Framed structures. Lecture notes.* Dept. of Civil Environmental and Architectural Engineering. University of Colorado. 306 p.

Sarma, K. C.; Adeli, H. 2000. Fuzzy genetic algorithm for optimization of steel structures, *Journal of Structural Engineering* 126: 596–604.

Schmit, L. A. 1960. Structural design by systematic synthesis, *Proceedings of the 2nd ASCE conference on electronic computation,* 105–122.

Schmit, L. A.; Farshi, B. 1974. Some Approximation Concepts for Structural Synthesis, *AIAA Journal* 12(5): 692–699.

Schmit, L. A.; Miura, H. 1976. *Approximation Concepts for Efficient Structural Synthesis Vol. 2552*. NASA, 289 p.

Schmit, L. A. 1981. Structural Synthesis – Its Genesis and Development, *AIAA Journal* 19(10): 1249–1263.

Schoofs A. J. G. 1993. Structural optimization history and state-of-the-art, *Topics in applied mechanics: Integration of theory and applications in applied mechanics*: 339–345.

Shanley, F. R. 1952 *Weight-Strength Analysis of Aircraft Structures*. McGraw-Hill, 394 p.

Smith, I. M.; Griffiths, D. V. 2004. *Programming the Finite Element Method*. John Wiley & Sons Inc. 646 p.

Soh, C. K.; Chan, T. K. 2001. Numerical Method for Lower-Bound Solution of the Rigid-Plastic Limit Analysis Problem, *Journal of Engineering Mechanics* 127(11): 1075–1081.

STR 2.05.08:2005: Plieninių Konstrukcijų Projektavimas. Pagrindinės Nuostatos. Vilnius, 2005.

Trahair, N.S.; Bradford, M.A.; Nethercot, D.A.; Gardner, L. 2008. *The behavior and design of steel structures of EC3.* Taylor&Francis. 490 p.

Vanderplaats, G. N. 1979. An Efficient Algorithm for Numerical Airfoil Optimization, *AIAA Journal of Aircraft* 16(12): 842–847.

Vanderplaats, G. N. 1982. Structural Optimization – Past, Present and Future, *AIAA Journal* 20(7): 992–1000.

Vanderplaats, G. N. 1999. Structural Design Optimization Status and Direction, *Journal of Aircraft*, 36 (1): 11–20.

Vanderplaats, G. N. 2004. Very Large Scale Continuous and Discrete Variable Optimization, in *Proceedings of 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, Paper No. AIAA–2004–4458.

Vanderplaats, G. N. 2006. Structural optimization for statics, dynamics and beyond, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 28 (3): 316–322.

Vanderplaats, G. N.; Salajegheh, E. 1989. A New Approximation Method for Stress Constraints in Structural Synthesis, *AIAA Journal* 27(3): 352–358.

Venkayya, V. B. 1971. Design of Optimum Structures, *Computers and Structures Journal* 1: 265–309.

Venter, G.; Sobieszczanski-Sobieski, J. 2003. Particle Swarm Optimization, *AIAA Journal* 41(8): 1583–1589.

Wong, B. 2009. *Plastic Analysis and Design of Steel Structures*. Elsevier. 256 p.

Wriggers, P. 2008. *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer. 560 p.

Zhang, Y. G.; Lu, M. W. 1995. An Algorithm for Plastic Limit Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 126 (3–4): 333–341.

Zienkiewicz, O.; Taylor, R. 2005. *The finite element method: its basis and fundamentals.* Butterworth-Heinemann. 752 p.

Zoutendijk, G. 1960. *Methods of feasible directions*. Elsevier, 126 p.

Амосов А. А.; Дубинский Ю.А.; Копченова Н.В. 2008. *Вычислительные методы для инженеров*. Москва: Издательский дом МЭИ, 672 с.

Аткочюнас, Ю. Ю. 1994. *Расчет упругопластических систем при повторных напряжениях.* Вильнюс: Издательство науки и энциклопедий, 148 p.

Икрин, В. А. 2005. *Сопротивление материалов с элементами теории упругости и пластичности.* Москва: Издательство АСВ. 424 с.

Каркаускас, Р.; Крутинис, А.; Аткочюнас, Ю. Ю.; Каланта, С.; Нагявичюс, Ю. 1990. *Строительная механика программы и решения задач на ЭВМ.* Москва: Стройиздат, 359 p.

Никитин, С. К.; Чибиряков, В. К. 1987. Решение некоторых задач механики сплошных сред методом инвариантного погружения, *Прикладная механика* 23: 17–23.

Пермяков, В. А.; Перельмутер, А. В.; Юрченко, В. В. 2008. *Оптимальное проектирование стальных стержневых конструкций.* Киев: ТОВ «Издательство «Сталь». 538 с.

Рейтман, М. И.; Ярин, Л. И. 1974. *Оптимизация параметров железобетонных конструкций на ЭЦВМ.* Москва: Стройиздат. 96 с.

Секулович, М. 1993. *Метод конечных элементов.* Москва: Стройиздат. 664 с.

Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas

Straipsniai recenzuojamuose mokslo žurnaluose

Karkauskas, R.; Popov, M. 2011. The Analysis of geometrically nonlinear elastic-plastic space frames, *Journal of Civil Engineering and Management.* Vol. 17 (4): 558–568. ISSN 1392-3730. (Thomson ISI Web of Science).

Popov, M.; Karkauskas, R.; Rimkus, L. 2013. The algorithm for nonlinear inelastic optimization of 3D steel frameworks under serviceability requirements, *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering.* Vol. 9 (3): 62–71. ISSN 1524-5845. (Index Copernicus).

Karkauskas, R.; Popov, M. 2009 a. Geometriškai netiesinių rėminių konstrukcijų 2D elemento tangentinės standumo matricos sudarymo ypatumai. *Mokslas – Lietuvos ateitis: Statyba* Vol. 1 (5): 45–49. ISSN 2029-2341. (Index Copernicus).

Karkauskas, R.; Popov, M. 2009 b. Netamprių geometriškai netiesinių plieninių rėminių konstrukcijų skerspjūvių optimizavimo algoritmas, *Statybinės konstrukcijos ir technologijos.* Vol. 1 (1): 10–22. ISSN 2029-2317. (Index Copernicus).

Straipsniai kituose leidiniuose

Каркаускас, Р.; Попов, М. 2007. Алгоритм оптимизации неупругих шарнирно-стержневых систем и его интеграция с современными компьютерными технологиями анализа конструкций, *Проблемы современного бетона и железобетона: сборник трудов: [доклады Международного симпозиума, 16–19*

октября 2007 г., г. Минск] / Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь, Национальная академия наук Республики Беларусь, Союз строителей Беларуси, Научно-исследовательское республиканское унитарное предприятие по строительству "Институт БелНИИС". Ч. 1. Бетонные и железобетонные конструкции. Минск: НП ООО "Стринко": 214–225. ISBN 978-985-6476-44-3.

Popov, M.; Karkauskas, R.; Nagevičius, J. 2010. Optimization of 3D steel frames prior to plastic collapse, *10th International Conference Modern Building Materials, Structures and Techniques: selected papers.* Vol. 2: 1014–1021. ISBN 9789955285946.

Popov, M.; Karkauskas, R. 2007. Apie tamprių-plastinių plokščių optimizacijos uždavinių integraciją su kompiuterinėmis konstrukcijų analizės sistemomis, *Statyba: 10-osios Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijos "Mokslas – Lietuvos ateitis", įvykusios Vilniuje 2007 m. kovo 29–30 d., pranešimų rinkinys*: 193–200. ISBN 978-9955-28-163-4.

Summary in English

Introduction

Problem formulation

For optimal design of structures, different requirements for design codes, including safety, serviceability and design, must be considered. Structure optimization is the creation of an object that satisfies the prescribed constraints of design and meets the best value of the accepted performance criterion. Structure optimization is the first stage of optimal structural design that allows taking into consideration the above-mentioned requirements and fully describes the behavior of designing a structure. Many questions can be answered by solving different problems of structure optimization: limit to the load value of the structure, the distribution of real stress and a displacement under an applied load, the geometrical parameters of the cross-sections of the elements providing the save and durable behavior of the structure, etc.

Modern tendencies for structural design are connected with the economy of the employed building materials in order to more efficiently use them. Besides traditional calculation based on the linear theory assumptions, more and more design codes define certain aspects of the behavior of nonlinear structures, i.e. strive for investigating the real behavior of the structure. It can be provided by having comprehensive information about the behavior of the building structure under all working conditions at any period of its existence. Naturally, the optimization problem in such a broad concept cannot be solved by the linear theory methods of structural mechanics. The form and size of the structure considerably vary under certain loads, and the principle of a small displacement becomes

unreliable. In addition, Hook's law is not satisfied and should be substituted by nonlinear relation for a number of materials starting from a certain condition of stresses. Thus, it is necessary to renounce the linear theory assumptions and rely on broader and more complex generalizations of the nonlinear theory:

1. To renounce calculation according to the unstrained condition that tolerates a small displacement.
2. To assess the influence of variations in the geometry of the structure on its stress-strain state (SSS).
3. To maintain non-linear stress-strain relationship and evaluate occurring plastic deformations taking into account that the structures of certain materials obtain very large displacements before plastic collapse, and therefore might not satisfy requirements for regular service.
4. To select yield conditions for structural elements so that to more precisely define the behavior of structures. Design codes of different countries present linearized yield conditions, which significantly restricts the behavior of structures. Thus, the necessity to refer to yield conditions having a relatively wider yield value and presented in the works of other authors arises.
5. To carefully consider the real displacement of the structure for recording conditions for the displacement constraints of the optimization problem.

Having considered all above introduced aspects, a mathematical model has been created finding a direct solution to which is a rather serious problem. The thesis suggests an original solution algorithm that allows avoiding difficulties that arise working towards the clarification and having stricter control over the process of dealing with the optimization problem.

Relevance of the thesis

In the thesis created new mathematical models for geometrically nonlinear elastic plastic construction structures calculation and optimization under displacements constraints by using mathematical programming theory an mechanical principle of extreme energy. The original algorithm using modern computer technologies for geometrically nonlinear elastic plastic frameworks structures under displacements constraints is created. It opens new possibilities in construction engineering for in economy of material and resources in the stages of project and production.

Research object

The thesis examines the creation of mathematical models for optimization problems of inelastic geometrically nonlinear frame structures and focuses on the possibilities of working out solutions.

The goal of the thesis

The goal of the thesis is to develop an original algorithm for finding a solution to the mathematical model of an optimization problem of geometrically nonlinear elastic-plastic three-dimensional frame structures. The introduced model considers all above-mentioned aspects. The created algorithm allows monitoring the deformability of the structure within the iteration process and guarantees a successful convergence of the problem.

Tasks of the thesis

To reach the aim of the work, the following problems must be considered:

1. To develop a technique for composing a tangent stiffness matrix of the three-dimensional finite element and to promote a symbolic calculation program to obtain the expression of this matrix.
2. To create a mathematical model for the optimization problem of the geometrically nonlinear elastic-plastic three-dimensional frame structure and solve this problem. To make comparative analysis of obtained solution results with those received by other authors.
3. To create a mathematical model for the optimization problem of the geometrically nonlinear elastic-plastic three-dimensional frame structure under displacement constraints and to obtain this problem numerical solution result. To make comparative analysis of obtained solution results.
4. To combine the problems of second-order elastic calculation, analysis of an elastic-plastic structure and optimization under displacement constraints into a single general algorithm for an iterative solution.
5. To check the efficiency of the suggested algorithm for finding a solution to the optimization problem applying software created using simulation techniques.

Research methods

The thesis applies to numerical simulation methods, including the finite element method, the Newton-Raphson method for solving nonlinear equations and the methods for solving nonlinear optimization problems.

Scientific novelty

The principles of the suggested original algorithm for proposing a solution to the structural optimization problem can be applied calculating any type of the structure.

The methodology for a tangent stiffness matrix of the three-dimensional finite element has been extended and can be applied establishing the expressions of tangent stiffness matrices of other types of finite elements. The principles of the employed methodology can be used for creating symbolic calculation programs to obtain the expressions of tangent matrices of other types of finite elements.

A mathematical model for the analysis problem of geometrically nonlinear elastic-plastic three-dimensional frame structures under nonlinear yield conditions has been formulated and solved, which allows establishing the real SSS close to the behavior of the real structure taking into account the investigated structure.

The optimization problem of structures has been formulated and solved using nonlinear conditions for yield and displacement constraints and considering the real SSS of structures.

Practical significance of dissertation

The suggested algorithm for the mathematical model of the optimization problem of geometrically nonlinear elastic-plastic three-dimensional steel frame structures cover safety, serviceability and design requirements and can be applied for designing or reconstructing real structures and launching an optimal project of the structure.

Defended statements

1. Material plastic properties and geometrically nonlinear behavior of structures that proper for many (especially steel) structures should be considering in construction structures calculations to approach it to real materials and work condition.
2. The mathematical programming theory and mechanical principle of extreme energy make possible to create new mathematical models for geometrically nonlinear elastic plastic construction structures optimization problems under displacements constraints and algorithms and methods for these problems solution.
3. The improvement of elastic plastic geometrically nonlinear structures optimization models is theoretical and practical foundation for construction structures economical and scientific development: the new possibilities of material and resources saving at projecting and production stages.

Structure of thesis

The work consist of introduction, three chapters, conclusions, references, list of publications and annexes. The total work content is 118 pages, 32 figures, 12 tables and 8 annexes.

1. The structure optimization under complex constraints

The task for the optimization problem of the frames examined in the thesis is formulated as follows: knowing the configuration of the frame and external forces, the distribution of the cross-sectional areas A_k of structural elements must be found; distribution must satisfy the optimal criterion for a minimum volume structure when individual structural elements are exposed to plastic deformations. Serviceability requirements for the considered optimization problem should include, first of all, conditions defining the real SSS of the structure. Such conditions are dependencies of the generalized Lagrange problem. Second, stiffness conditions should include displacement boundaries in certain nodes of the structure with reference to indicated directions: $\mathbf{u}_t^- \le \mathbf{u}_{e,t} + \mathbf{u}_{r,t} \le \mathbf{u}_t^+$, where $\mathbf{u}_t^-$ and $\mathbf{u}_t^+$ are prescribed lower and upper displacement bounds in t direction. Apart from the above introduced conditions, different technological or structural limitations to element stability or a lower reference limit to internal forces $\mathbf{S}_0^{\min}$ can be applied. Such a situation restrict the free movement of non-elastic strains of the structure, and therefore the elements of the structure having optimal cross-sections face elastic and plastic deformations affected by residual internal forces $\mathbf{S}_r$ and residual displacements $\mathbf{u}_r$. If any of the abovementioned boundaries become active, the structure does not reach plastic collapse.

Therefore, the mathematical model of the formulated optimization problem is as follows (Čyras *et al.* (2004), Karkauskas (2004)):

$$
\begin{aligned}
&\text{Find} && V\left(A_k\right) \to min, \\
&\text{when} && \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\left(A_k\right)\right) \le \mathbf{1},\ \mathbf{A}_n \mathbf{S}_r = \mathbf{F} - \mathbf{A}_n \mathbf{S}_e, \\
& && \mathbf{D}_n \boldsymbol{S}_r - \mathbf{A}_n{}^T \boldsymbol{u}_r + \left[\nabla^T \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\left(A_k\right)\right)\right]\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \\
& && \boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{1} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\left(A_k\right)\right)\right) = \mathbf{0}, \\
& && \mathbf{u}_t^- \le \mathbf{u}_{e,t} + \mathbf{u}_{r,t} \le \mathbf{u}_t^+,\ \mathbf{S}_0\left(A_k\right) \ge \mathbf{S}_0^{min},\ \boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{0},\ k = 1, 2, ..., s.
\end{aligned}
\tag{S1.1}
$$

where A_k is the cross-sectional area of the k group of structural elements; $\mathbf{S}_0$ is the vector of the limit values of internal forces; $\mathbf{D}_n$ is the quasi-diagonal flexibility matrix of the finite element structure considering variations in the geometry of the structure; $\mathbf{A}_n$ is the matrix of the coefficients of balance equations and related to the displacements of a discrete model; $\mathbf{F}$ is the vector of external forces applied to the nodes of the discrete model of the structure; $\boldsymbol{\lambda}$ is the vector of Lagrange multipliers.

This is a multi-extremal problem of nonlinear mathematical programming. Multiextremality is the result of Kuhn–Tucker conditions, i.e. equations $\boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{1} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0\left(A_k\right)\right)\right) = \mathbf{0}$. The problem is solved in an iterative way, and this factor makes the process of accomplishing task complicated.

To avoid the above mentioned complications, an original algorithm for the nonlinear optimization of structures (implementing iterative procedures in the optimization cycle) is created. The cycle of the optimization problem includes three stages. The overall schematic view of the algorithm for the optimization problem is presented in Fig. S1.

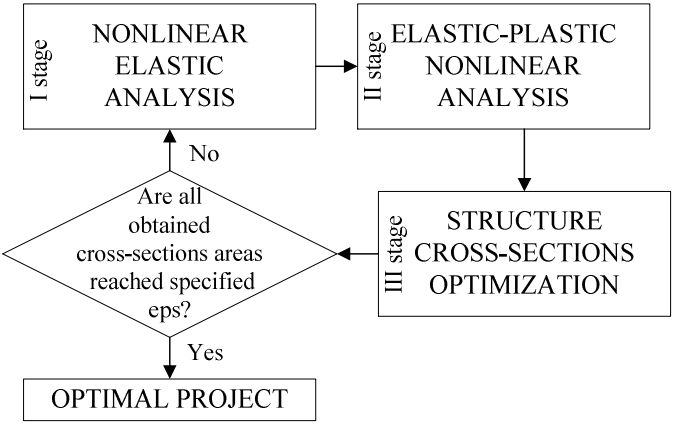


Fig. S1. Solution algorithm of optimization problem (S1.1)

In scientific literature there are not enough paid attention for geometrically nonlinear elastic plastic construction structures under displacements constraints calculation and optimization problematic (there are few theoretical and construction structures experimental development works). In order to this it is necessary to create a mathematical model for the optimization problem of the geometrically nonlinear elastic-plastic three-

dimensional frame structure under displacement constraints, to solve this problem and to make comparative analysis of obtained solution results.

2. The analysis of geometrically nonlinear structures

The nonlinear elastic analysis problem of the structure is the first stage of the suggested (S1.1) algorithm for solving the optimization problem. The problem of the stage is worked out applying the equilibrium equation for the tangent stiffness method of finite elements (Barauskas 1998, Barauskas *et al.* 2004):

$$\mathbf{K}_t \mathbf{u}_e = \mathbf{F}. \tag{S2.1}$$

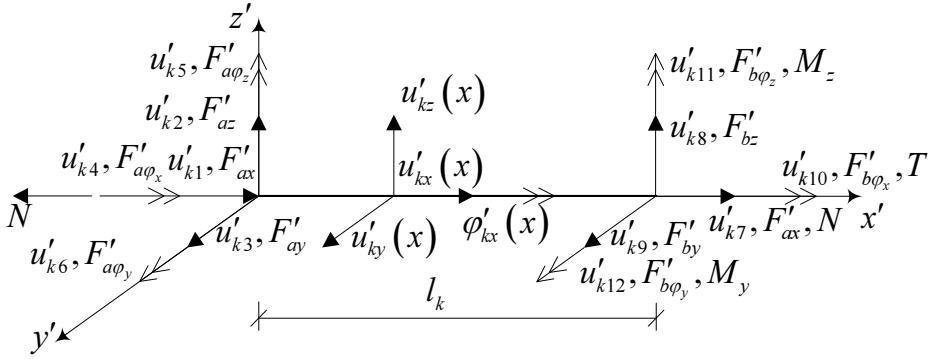


Fig. S2. The space frame finite element

The investigating element of the space frame structure is shown in Fig. S2. It is accepted that the element's nodes can have the displacements which are considerably larger than the element's dimensions, but the own form of the element does not change. Element's strains stay small. The element's internal forces vector in local coordinates system is writing as follows:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_k\left(\mathbf{u}'_k\right) = &\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l \left\{\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k(x)}{\partial \mathbf{u}'_k}\right\}^T \boldsymbol{\sigma}_k(x)\,dxdydz + \\ &\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l \left\{\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_k(x)}{\partial \mathbf{u}'_k}\right\}^T \boldsymbol{\tau}_k(x)\,dxdydz.\end{aligned} \tag{S2.2}$$

The beam element is under rotation and subjected to compression, tension and bending in two perpendicular axes. The vector of displacements for any point of the frame element:

$$\mathbf{u}_k(x) = \left[u'_x(x) \quad u'_y(x) \quad u'_z(x) \quad \varphi'_x(x)\right]^T. \tag{S2.3}$$

Expressed by the nodal displacements as follows:

$$\mathbf{u}_k(x) = \mathbf{N}_k(x)\mathbf{u}_k', \tag{S2.4}$$

here $\mathbf{N}_k(x)$ is the matrix of the Hermitian polynomials.

The total longitudinal and lateral deformations for the nonlinear space frame element can be obtained in the following way:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_k(x) &= \Delta_x - y\kappa_y - z\kappa_z = \\ &\frac{\partial u_x'(x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y'(x)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z'(x)}{\partial x}\right)^2 - y\frac{\partial^2 u_z'(x)}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 u_y'(x)}{\partial x^2},\end{aligned} \tag{S2.5}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_k(x) = y\theta_x + z\theta_x = y\frac{\partial \varphi_x'(x)}{\partial x} + z\frac{\partial \varphi_x'(x)}{\partial x}. \tag{S2.6}$$

The three-dimensional frame element is received inserting (S2.5) and (S2.6) into the expression of (S2.2) and can be recorded as follows:

$$\mathbf{k}_\tau(\mathbf{u}_k') = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_k(\mathbf{u}_k')}{\partial \mathbf{u}_k'} = \mathbf{k}_e' + \mathbf{k}_g' + \mathbf{k}_u', \tag{S2.7}$$

here

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_e' = E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l &\Big(\mathbf{C}_0{}^T\mathbf{C}_0 - z\mathbf{C}_0{}^T\mathbf{C}_4(x) - y\mathbf{C}_0{}^T\mathbf{C}_5(x) - \\ &z\mathbf{C}_4(x)^T\mathbf{C}_0 + z^2\mathbf{C}_4(x)^T\mathbf{C}_4(x) + zy\mathbf{C}_4(x)^T\mathbf{C}_5(x) - \\ &y\mathbf{C}_5(x)^T\mathbf{C}_0 + zy\mathbf{C}_5(x)^T\mathbf{C}_4(x) + y^2\mathbf{C}_5(x)^T\mathbf{C}_5(x)\Big)dxdydz + \\ G\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l &\Big(z^2\mathbf{C}_3{}^T\mathbf{C}_3 - zy\mathbf{C}_3{}^T\mathbf{C}_3 + y^2\mathbf{C}_3{}^T\mathbf{C}_3\Big)dxdydz\end{aligned} \tag{S2.8}$$

is element‘s small displacements matrix;

$$\mathbf{k}_g' = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^l \Big(\mathbf{C}_6(x)^T + \mathbf{C}_7(x)^T\Big)\boldsymbol{\sigma}_k(x)dxdydz \tag{S2.9}$$

is geometric stiffness matrix;

$$\mathbf{k}'_u = E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{0}^{l}\Big(0,5\mathbf{C}_0{}^T\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_6(x)+0,5\mathbf{C}_0{}^T\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_7(x)+$$
$$\mathbf{C}_6(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{C}_0+0,5\mathbf{C}_6(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_6(x)+$$
$$0,5\mathbf{C}_6(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_7(x)-z\,\mathbf{C}_6(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{C}_9(x)-$$
$$y\,\mathbf{C}_6(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{C}_5(x)+\mathbf{C}_7(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{C}_0+ \qquad \text{(S2.10)}$$
$$0,5\mathbf{C}_7(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_6(x)+0,5\mathbf{C}_7(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_7(x)-$$
$$z\,\mathbf{C}_7(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{C}_4(x)-y\,\mathbf{C}_7(x)^T\mathbf{u}_k'\mathbf{C}_5(x)-$$
$$0,5z\,\mathbf{C}_4(x)^T\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_6(x)-0,5z\,\mathbf{C}_4(x)^T\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_7(x)-$$
$$0,5y\,\mathbf{C}_5(x)^T\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_6(x)-0,5y\,\mathbf{C}_5(x)^T\mathbf{u}_k'{}^T\mathbf{C}_7(x)\Big)\,dxdydz$$

is element's initial displacement stiffness matrix.

All matrices of structural stiffness, following the transformation of axes are combined into the stiffness matrix $\mathbf{K}_r$ of the whole structure.

For numerical realization of the first algorithm's stage tangent stiffness technique Newton-Raphson method with load control is used in order to solve a set of nonlinear equations (S2.1).

The second stage of the suggested algorithm is elastic-plastic nonlinear analysis. The real values of the SSS are obtained as a result of the problem encountered at this stage. This is a sum of the internal forces of nonlinear analysis, including residual internal forces and displacement values.

The principle of extreme energy (Čyras 1983; Čyras *et al.* 2004) was used for obtaining residual internal forces of the elastic-plastic system in the real mode. This principle is formulated as follows:

„Of all statically admissible vectors of residual forces at the step to be considered, the actual vector is one for which the increment of complementary energy is minimum".

Thus, the above formulated principle of extreme energy corresponds the following problem of nonlinear mathematical programming:

Find
$$\min\ U_r = \frac{1}{2}\mathbf{S}_r^T\,\mathbf{D}_n\mathbf{S}_r,$$
when
$$\mathbf{A}_n\mathbf{S}_r = \mathbf{F}-\mathbf{A}_n\mathbf{S}_e, \qquad \text{(S2.11)}$$
$$\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e,\mathbf{S}_r,\mathbf{S}_0\right)\le\mathbf{1}.$$

The before introduced problem is a variational analysis of a convex mathematical programming problem. This is the minimization of the graduated function over a convex set. Further in the text, (S2.11) will be referred to as the static formulation of the problem analyzing residual internal forces.

The dual problem determining residual displacements of the structure is formulated applying the Lagrange function of problem (S2.11). Lagrange multipliers of equilibrium

conditions are the vector of residual displacements $\mathbf{u}_r$ and yield conditions are represented by the vector of plastic multipliers $\boldsymbol{\lambda}$. Finally, the following dual problem is obtained:

Find
$$\max -\frac{1}{2}\mathbf{S}_r^T\mathbf{D}_n\mathbf{S}_r - \boldsymbol{\lambda}^T\left(\mathbf{1}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e,\mathbf{S}_r,\mathbf{S}_0\right)\right)+\mathbf{u}_r^T\mathbf{F}-\mathbf{S}_r^T\mathbf{D}_n\mathbf{S}_e - \boldsymbol{\lambda}^T\left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e,\mathbf{S}_r,\mathbf{S}_0\right)\right](\mathbf{S}_e+\mathbf{S}_r), \tag{S2.12}$$

when
$$\mathbf{D}\mathbf{S}_r+\left[\nabla^T\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e,\mathbf{S}_r,\mathbf{S}_0\right)\right]\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{A}_n{}^T\mathbf{u}_r=\mathbf{0},\ \boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0}.$$

This is a kinematic formulation of the problem analyzing residual internal forces.

While formulating the problems analyzing elastic-plastic structures and their mathematical models, terms for selecting appropriate strength remains one of the crucial aspects. As for the examination of three-dimensional structures, a complex strain state is worth being mentioned. Also, the application of strength conditions, including tension-compression strength as well as bending around one or another axis of the structural element should be purposeful. Strength conditions, under a complex stress-strain state, are frequently described in construction codes and specifications regulating the design of building structures (ANSI/AISC 360-10).

According to construction specifications AISC-LRFD (Kim S.-E. *et al.* 2001; Aminmansour, A. 2000; ANSI/AISC 360-10), the double-axis yield strength surface of the beam-column element (presented graphically in Fig. 3S) is expressed by the equation given below:

$$\begin{aligned} &1\geq\frac{N_j}{N_{y,j}}+\frac{8}{9}\frac{M_{y,j}}{M_{yp,j}}+\frac{8}{9}\frac{M_{z,j}}{M_{zp,j}},\ kai\frac{N_j}{N_{y,j}}\geq\frac{2}{9}\frac{M_{y,j}}{M_{yp,j}}+\frac{2}{9}\frac{M_{z,j}}{M_{zp,j}},\\ &1\geq\frac{N_j}{2N_{y,j}}+\frac{M_{y,j}}{M_{yp,j}}+\frac{M_{z,j}}{M_{zp,j}},\ kai\frac{N_j}{N_{y,j}}<\frac{2}{9}\frac{M_{y,j}}{M_{yp,j}}+\frac{2}{9}\frac{M_{z,j}}{M_{zp,j}}. \end{aligned} \tag{S2.13}$$

Though strength conditions are provided by design codes and specifications, the efforts of various researchers were made to accurately reflect a complex state of strains. An example is Orbison's full yield surface of the cross-section (presented in Kim *et al.* (2001), Chiorean and Barsan (2005)) described as follows:

$$1\geq 1{,}15n_j^2+m_{z,j}^2+m_{y,j}^4+3{,}67n_j^2m_{z,j}^2+3{,}0n_j^6m_{y,j}^2+4{,}65m_{z,j}^4m_{y,j}^2, \tag{S2.14}$$

here $n_j=N_j/N_{y,j}$; $m_{y,j}=M_{y,j}/M_{yp,j}$ is „weak axis" of element's cross-section area; $m_{z,j}=M_{z,j}/M_{zp,j}$ is „strong axis" of element's cross-section area.

Orbison's yield surface is shown in Fig. S3.

The local stability of the structure is checked according to formulas (S2.13) or (S2.14) when compression members are loaded up to the values of their critical forces the internal forces of the compressed elements of which are calculated according to requirements for design standards. Eurocode 3 2006 normative documents suggest the following expression:

$$N_{b,Rd}=\chi Af_u/\gamma_{\mathrm{M1}}, \tag{S2.15}$$

here $N_{b,Rd}$ is the element's design value of buckling strength; χ is the buckling coefficient; A is structure's element cross-section area; f_u is the structure's material strength (yield) limit; γ_{M1} is the partial coefficient (is taking equal 1,0).

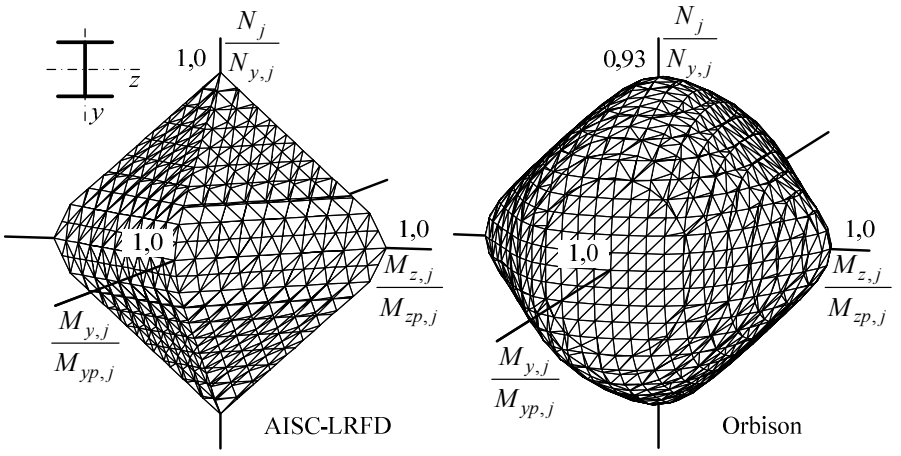


Fig. S3. Yield surfaces

Buckling coefficient χ is obtained with reference to Eurocode 3 2006 accordingly to proper conventional slenderness ratio $\overline{\lambda}$ that depends on buckling length l_b and effective length coefficient μ received taking into account STR 2.05.08:2005 requirements.

The global stability of the whole structure is checked by calculating a determinant of the tangential stiffness matrix of the entire structure $\mathbf{K}_T$ according to equation (S2.1) at the last stage of calculating numerical implementation. If the value of the determinant equals zero, the structure has lost the overall stability. Further calculations are not performed.

All above-mentioned conditions do not take into consideration the effect of torsional strains on the complex state of strains. Consequently, to get comprehensive information about strength, some torsional strength conditions should be used. Torsional strength condition given by Eurocode 3 (2006) is expressed by the equation:

$$T_{Ed} / T_{Rd} \le 1,0, \tag{S2.16}$$

here T_{Ed} is torsion moment applied to the structural element; T_{Rd} is torsion strength specified for the structural element.

A two-storied space frame structure (Fig. S4) was chosen for the numerical realization of the above-mentioned mathematical models. This structure was studied by Kim et al. (2003) (testing the full-size model made of real steel profiles was described) and Kim and Lee (2002) (the analysis of a discrete computer-generated model in the environment of program ABAQUS was presented). In the latter research, the obtained results were compared with data obtained in the former research.

Structural elements are modelled using the profiles of type H150×150×7×10. The overall dimensions of the frame (Fig. S4) are as follows: width in the direction of axis x is 2,5 m, length in the direction of axis y – 3,0 m, height from the column element base to the second floor level – 1,76 m and height from the second floor level to the roof is 2,2 m.

The geometrical and physical parameters of the cross-section of any structural element are constant through its full length. The yield strength of all structural elements – 320 MPa while the elastic modulus is 221 GPa and the shear modulus is 85 GPa. The model of the structure is subjected to the action of three various types.

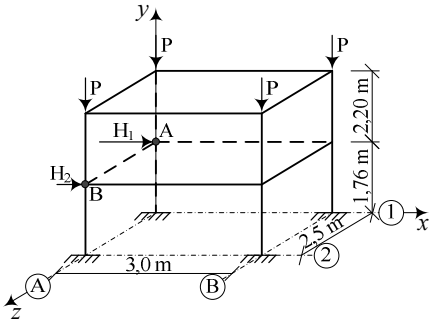


Fig. S4. The two-story space frame discrete model

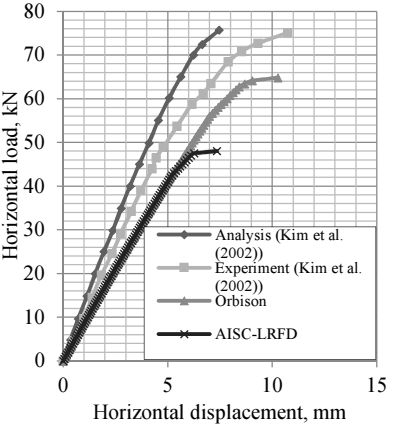


Fig. S5. Node B load-displacement curve under the first load case

Two calculations were performed for every load case. The first calculation was made applying Orbison's strength conditions (S2.14) and the second – AISC-LRFD standard strength conditions (S2.13). The results obtained in the performed two-storied space frame analysis were compared with data presented in work Kim and Lee (2002).

The carried out analysis revealed that under Orbison's strength conditions (S2.14), the results closely approached data obtained by Kim and Lee (2002) (Fig. S5). A greater deviation from the results presented in this work could be observed when strength conditions specified by AISC-LRFD design code (S2.13) were used. These conditions are more strict or conservative than those of Orbison's strength. It can be explained by the fact that AISC-LRFD is the construction code regulating structural steel design. While applying such standards, it is usually assumed that the structure works only within elastic work limits. The characters of load displacement diagrams and its comparison allow making a conclusion that construction work is obtained by the proposed algorithm and agree well with Kim et al. (2003) results.

3. The problem of structure optimization under displacement constraints

The general mathematical model of the third stage of the suggested algorithm, which is the problem of structure optimization under displacement constraints, is as follows:

Find $$\min \; V\left(A_k\right), \tag{S3.1}$$

when $$\mathbf{f}\left(\mathbf{S},\mathbf{S}_0\left(A_k\right)\right) \le \mathbf{1}, \tag{S3.2}$$

$$u_t^- \le u_t \le u_t^+, \tag{S3.3}$$

$$A_k \ge A_k^{\min}, \tag{S3.4}$$

$$t = 1,2,...,m_t,\; k = 1,2,...,s,$$

where $A_k^{\min}$ is the lower limit to design requirements.

Optimization problem (S3.1)–(S3.4) is a convex nonlinear mathematical programming problem having only one extremum. This problem is solved having comprehensive information about the real SSS under an applied load, i.e. when a solution to problems (S2.1) and (S2.12) is reached.

For an efficient use of the mathematical model for optimization problem (S3.1)–(S3.4) as well as for a good convergence of the obtained results, four important steps of preliminary calculations must be performed.

The first of the above mentioned steps of calculation is selecting the lower limits of the cross-sectional areas of structural constraints $A_k^{\min}$ (S3.4). This is achieved through finding an answer to the optimization problem of the structure at the stage of plastic collapse The mathematical model of the problem has the following form:

Find $$V\left(A_k^{\min}\right) \to \min,$$

when $$\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e,\mathbf{S}_r,\mathbf{S}_0\left(A_k^{\min}\right)\right) \le \mathbf{1}, \tag{S3.5}$$

$$\mathbf{A}_n\mathbf{S}_r = \mathbf{F} - \mathbf{A}_n\mathbf{S}_e,\; A_k^{\min} \ge \mathbf{0},\; k = 1,2,...,s.$$

This problem is solved with reference to the iteration method. The solution algorithm is presented in Fig. S6.

The next important step of calculation is the estimation of displacement boundaries. They can be determined using cross-sectional areas obtained solving problem (S3.5) and changing the applied load ratio. The upper limits of displacements can be established applying a significantly smaller load ratio than that employed for dealing with problem (S3.5) and considering problems (S2.1) and (S2.12), i.e. finding out displacements that occurred in the structure prior to plastic collapse. Further, displacements are calculated when the first plastic hinge occurs in the structure. Displacements result from a decrease in the load ratio and working out problems (S2.1) and (S2.12). The received values are the lower limits of displacement constraints, i.e. displacements corresponding an elastic response. Thus, the chosen values of conditions for displacement constraints of the optimization problem ((S3.1)–(S3.4)) should be between the following limit values:

$$when\, \boldsymbol{u}^+ > 0, so\, \boldsymbol{u}_{min}^+ \le \boldsymbol{u}^+ \le \boldsymbol{u}_{max}^+; when\, \boldsymbol{u}^- < 0,\; so\, \boldsymbol{u}_{min}^- \ge \boldsymbol{u}^- \ge \boldsymbol{u}_{max}^-. \tag{S3.6}$$

This is the way the elastic-plastic behavior of the structure can be ensured.

The third step of calculation covers the estimation of the start point of problem ((S3.1)–(S3.4)) and takes place changing the values of the areas of element cross-sections

and solving problems (S2.1) and (S2.12). The obtained values of displacements should be higher than the displacements of an elastic response and lower than displacements when the structure is prior to plastic collapse, i.e. must satisfy the following inequalities, which means displacements must agree with the above mentioned restrictions (S3.6).

The fourth important step of calculation establishes real displacements that depend on optimization parameters – the areas of the cross-sections of structural elements (S3.6) for displacement constraints. The values of these displacements are determined during the iterative calculation using the results obtained after proposing an algorithm for solving the problems at the first two stages. The calculation involves the evaluation of all changes in the initial structure according to the real SSS under an applied load (a discrete model of the structure is changed adding arising plastic hinges and modifying the initial coordinates of structural nodes).

While combining all above discussed calculations, the proposed algorithm for solving the optimization problem (S1.1) can be extended as shown in Fig. S7.

For calculating the optimization problem, the possibilities of the created algorithm will be disclosed through the optimization of the cross-sectional parameters of a six-story three-dimensional frame structure. The geometry of the investigated frame and the distribution of added vertical and horizontal loads are presented in Fig. 8S a. The magnitudes of forces make V_1=64,229 kN, V_2=128,457 kN and H_1=53,376 kN. The cross-sectional areas of structural elements fall in 6 different groups displayed in Fig. 8S a. All elements are made of steel the physical parameters of which present yield strength f_u=250 MPa and elasticity modulus E=206,85 GPa. Also, geometrically non-linear deformable behavior has been considered.

The created discrete model of the frame contains 69 nodes having 378 degrees of freedom and the elements of two types, i.e. 30 column-type elements and 66 beam-type elements. All of those in the structure are assumed to be compressive-tensile-torsional-flexural in two axial directions. Thus, the total number of internal forces makes 576.

American wide flange W type cross-sectional profiles (ASTM Standard A6/A6M) have been chosen for the optimization problem. For the numerical implementation of the proposed algorithm for optimization purposes, the relationships of the geometrical parameters of the cross-sectional areas of the elements are expressed employing the power function.

Next, deformability limits to the optimized frame will be shortly discussed. The lower limits of the optimized parameters – cross-sectional areas – are obtained from the optimization problem (S3.5) of the structure prior to plastic collapse. The result, according to the selected optimality criterion with 0,1 % accuracy, was obtained following 7 iterations. The dynamics of changes in cross-sectional values and the final result are shown in Table S1. Under the values of the cross-sectional areas of structural elements and load reduction factor γ_{red}=0,99, analysis problem (S2.12) is solved and the upper limits of frame displacements are established (displacement values under the plastic collapse of the structure).

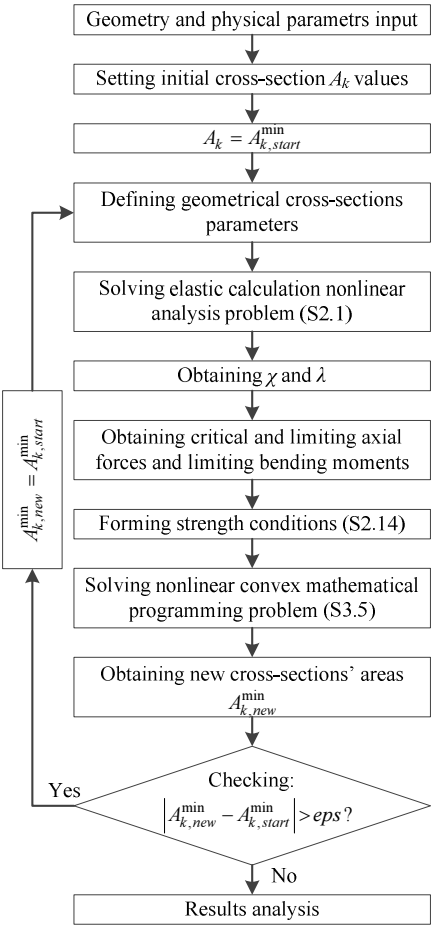


Fig. S6. The algorithm of optimization problem for structure being prior to plastic collapse

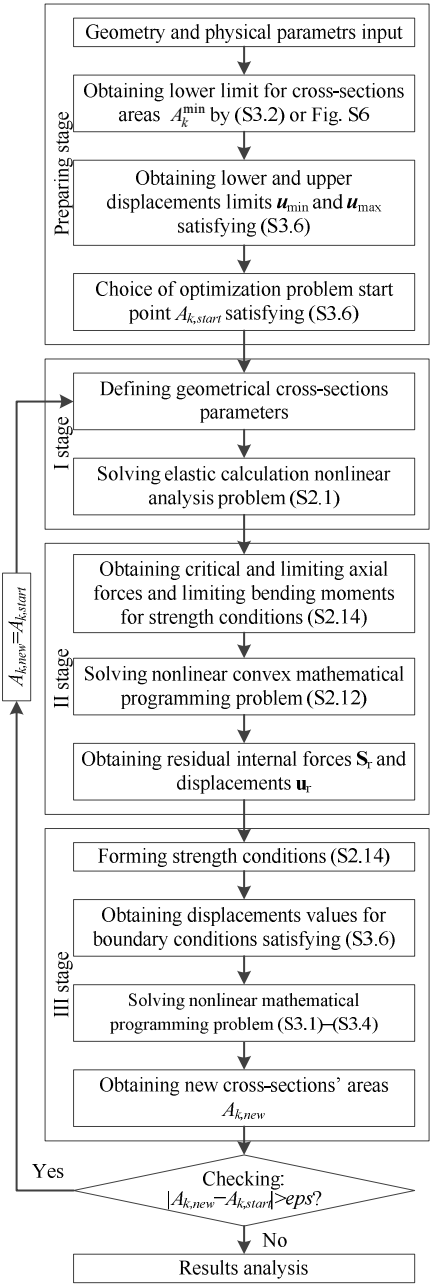


Fig. S7. The extented algorithm of optimization problem solution by suggesting algorithm

The horizontal displacement of node A in the positive direction of axis *x* (Fig. S8):

$$u_{A,x,\max} = u_{eA,x} + u_{rA,x} = 17,7310 + 5,3355 = 23,0665\,\text{cm}.$$

The vertical displacement of node B in the negative direction of axis *y* (Fig. S8):

$$u_{B,y,\max} = u_{eB,\text{y}} + u_{rB,\text{y}} = -4,8489 - 2,0112 = -6,8601\,\text{cm}.$$

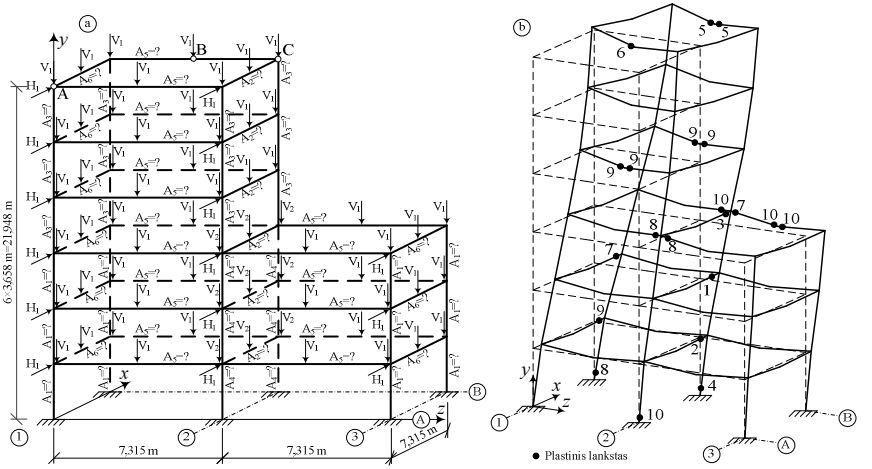


Fig. S8. The discrete model of six-story frame and it's deformed shape under applied load

Table S1. Six-story space frame optimization problem results for structure being prior to plastic collapse

Iteration	A_1, cm^3	A_2, cm^3	A_3, cm^3	A_4, cm^3	A_5, cm^3	A_6, cm^3	V, m^3
0	***100,0000***	***100,0000***	***100,0000***	***100,0000***	***100,0000***	***100,000***	***3,51168***
1	113,2130	120,9100	69,6722	128,3110	30,2495	112,9014	2,7569
...	…	…	…	…	…	…	…
6	135,2542	112,5077	96,5649	153,6516	29,4167	105,7227	2,9322
7	***135,8320***	***112,4600***	***96,7482***	***153,9854***	***29,4263***	***105,5612***	***2,9351***

Further, by decreasing load ratio γ_{red}=0,8 and working out the first two stages of the proposed algorithm for the optimization problem (S2.12), displacement values corresponding to the formation of the first plastic hinge are found. For the introduced SSS displacements, the values are as follows:

$$u_{A,x,\min} = u_{eA,x} + u_{rA,x} = 14,1062 + 0,1946 = 14,3008\ \text{cm},$$
$$u_{B,y,\min} = u_{eB,y} + u_{rB,y} = -3,8614 - 0,0087 = -3,8701\ \text{cm}.$$

These are lower limits to changes in frame displacements. Thus, limits to variations in nodal displacements accepted regarding conditions for the problem should be between the following tolerable boundaries:

$$14{,}3008\,\text{cm} < u_{A,x} = 19\,\text{cm} < 23{,}0665\ \text{cm},$$
$$-3{,}8701\,\text{cm} < u_{B,y} = -5{,}5\,\text{cm} < -6{,}8601\ \text{cm},$$

which ensures the elastic-plastic state of structural work.

For the optimization-iteration process, the appointed initial values of the cross-sectional areas of the elements are 5 % higher than those received prior to the plastic collapse of the structure. Upon choosing these particular values of cross-sectional areas as the start point of iterative calculation, and having solved the first two stages of the proposed algorithm for working out the optimization problem, the initial values of restricted displacements satisfying necessary conditions (S3.6) are obtained:

$$14{,}3008\,\text{cm} < u^{pr.}_{A,x} = 22{,}9039\,\text{cm} < 23{,}0665\ \text{cm},$$
$$-3{,}8701\,\text{cm} < u^{pr.}_{B,y} = -6{,}2127\,\text{cm} < -6{,}8601\ \text{cm}.$$

Having made the iterative calculation of the investigated frame, an optimal project of the selected optimality criterion with 5 % accuracy has been obtained following 7 iterations. The dynamics of changes in the designed parameters within the optimization-iteration process is shown in Table S2. The obtained optimal project of the frame is recorded in Table S2, in the line denoted by number 7. The places of the occurrence of plastic hinges and sequence are presented in Fig. S8, *b*.

Table S2. Six-story space frame optimization problem solution by suggesting algorithm

Iteration	A_1, cm^3	A_2, cm^3	A_3, cm^3	A_4, cm^3	A_5, cm^3	A_6, cm^3	V, m^3
0	*142,6246*	*134,7665*	*104,2538*	*161,6846*	*36,8370*	*152,0807*	*3,5166*
1	142,6236	113,5846	100,4277	161,6846	33,1045	106,6168	3,0583
...	…	…	…	…	…	…	…
6	155,4948	113,5846	103,4990	161,6846	32,6026	106,6168	3,1217
7	155,4948	113,5846	103,4990	161,6846	32,5632	128,3795	3,2645
(Kim *et al.* 2001)	W12x87	W12x87	W10x60	W12x120	W12x26	W12x53	
	165,1	***165,1***	***114,1***	***227,7***	***49,41***	***100,5***	***3,7625***

The analysis of the obtained results reveals that the chosen limit values of displacements make an influence on the optimization process, as under an optimal project, these are limited or close to them. Displacement $u_{A,x}$=13,8669 cm, which is less than the specified limit value making 19 cm. Displacement $u_{B,y}$=–4,2459 cm is bigger than the specified limit value, which is 5,5 cm. The value of the displacement of node C, under the maximum load value, is equal to 17,33 cm, which is 13,35 % lower than that (20 cm) obtained by Kim *et al.* (2001). A important point is that such result of the displacement of node C has been received under the circumstances when the volume of the material of an optimal structure (3,2645 m^3) is 13,23 % lower than that indicated by Kim *et al.* (2001) in his works (3,7625 m^3).

General conclusions

1. To approach construction structures to real materials and work conditions it is necessary to consider plastic material properties and geometrical nonlinearity of structure.
2. The efficiency of mathematical programming theory and mechanical principle of extreme energy combination in creation of new mathematical models for geometrically nonlinear elastic plastic construction structures calculation and optimization under displacements constraints.
3. The real SSS values have been obtained by using created geometrically nonlinear elastic plastic structures analysis mathematical mode. The application of Orbison strength for dealing with the problem of elastic-plastic analysis gives best result.
4. The given displacements, which were obtained by using created optimization problem solution algorithm are 13,35 % smaller than values obtained in Kim *et al.* (2001) work. It is significant to that the optimal volume of the structure in the project is 13,23 % smaller than volume of the structure investigating in Kim *et al.* (2001) work. It allows to save resources and materials at design and production stages of the project.

Priedai[1]

A priedas. Tangentinės standumo matricos nustatymas

A.1. Vykdomosios bylos tekstas
A.2. Gautas simbolinių skaičiavimų rezultatas

B priedas. Ekvivalentinių apkrovos jėgų nustatymas

B.1. Vykdomosios bylos tekstas
B.2. Gautas simbolinių skaičiavimų rezultatas

C priedas. Dviejų aukštų rėmo analizės rezultatai

C.1. Vykdomosios bylos tekstas
C.2. Tikslo funkcijos bylos tekstas
C.3. Netiesinių Orbisono stiprumo sąlygų bylos tekstas
C.4. Netiesinių AISC-LRFD stiprumo sąlygų bylos tekstas

[1] Priedai pateikiami pridėtoje kompaktinėje plokštelėje

D priedas. Šešių aukštų rėmo optimizacija plastiškosios suirties etape

D.1. Vykdomosios bylos tekstas
D.2. Tikslo funkcijos bylos tekstas
D.3. Netiesiniu apribojimu sąlygų bylos tekstas

E priedas. Šešių aukštų rėmo analizės uždavinys

E.1. Vykdomosios bylos tekstas
E.2. Tikslo funkcijos bylos tekstas
E.3. Netiesiniu apribojimu sąlygų bylos tekstas

F priedas. Šešių aukštų rėmo optimizacija pagal siūlomą algoritmą

F.1. Vykdomosios bylos tekstas
F.2. Analizės uždavinio tikslo funkcijos bylos tekstas
F.3. Analizės uždavinio netiesiniu apribojimu sąlygų bylos tekstas
F.4. Optimizavimo ribojant poslinkius tikslo funkcijos bylos tekstas
F.5. Optimizavimo ribojant poslinkius netiesiniu apribojimu sąlygų bylos tekstas

G priedas. Bendraautorių sutikimai teikti publikacijų medžiagą disertacijoje

H priedas. Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema kopijos

Michail POPOV

TAMPRIŲ PLASTINIŲ GEOMETRIŠKAI NETIESINIŲ STRYPINIŲ KONSTRUKCIJŲ OPTIMIZAVIMAS RIBOJANT POSLINKIUS

Daktaro disertacija
Technologijos mokslai, statybos inžinerija (02T)

Michail POPOV

OPTIMIZATION OF GEOMETRICALLY NONLINEAR ELASTIC PLASTIC FRAMEWORK STRUCTURES UNDER DISPLACEMENT CONSTRAINTS

Doctoral Dissertation
Technological Sciences, Civil Engineering (02T)

2014 05 15. 11,75 sp. l. Tiražas 20 egz.
Vilniaus Gedimino technikos universiteto
leidykla „Technika“,
Saulėtekio al. 11, 10223 Vilnius,
http://leidykla.vgtu.lt
Spausdino UAB „Baltijos kopija“
Kareivių g. 13B, 09109 Vilnius