

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

Olga LAVCEL-BUDKO

NETIESINIŲ BANGŲ REZONANSINĖS SAŲVEIKOS
MATEMATINIŲ MODELIŲ TYRIMAS

DAKTARO DISERTACIJA

FIZINIAI MOKSLAI,
MATEMATIKA (01P)


Vilnius LEIDYKLA TECHNICA 2014

Disertacija rengta 2009–2014 metais Vilniaus Gedimino technikos universitete.

Mokslinis vadovas

prof. dr. Aleksandras KRYLOVAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

VG TU leidyklos TECHNIKA 2281-M mokslo literatūros knyga
<http://leidykla.vgtu.lt>

ISBN 978-609-457-723-9

© Olga Lavcel-Budko, 2014

© VG TU leidykla TECHNIKA, 2014

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY

Olga LAVCEL-BUDKO

THE INVESTIGATION OF
RESONANT INTERACTION OF
SOME MATHEMATICAL MODEL
OF NONLINEAR WAVES

DOCTORAL DISSERTATION

PHYSICAL SCIENCES,
MATHEMATICS (01P)

Doctoral dissertation was prepared at Vilnius Gediminas Technical University in 2009–2014.

Scientific supervisor

Prof Dr Aleksandras KRYLOVAS (Vilnius Gediminas Technical University, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

Santrauka

Disertacijoje nagrinėjami netiesinių bangų rezonansinės sąveikos matematiniai modeliai. Jie aprašomi netiesinėmis diferencialinėmis lygtimis dalinėmis išvestinėmis, kai netiesiškumas yra proporcingas mažajam parametru ε . Tokiems uždaviniams spręsti taikomi specifiniai asimptotinės analizės metodai: kelių mastelių ir vidurkinimo, nes tiesioginiai skleidiniai gaunami mažojo parametro metodu turi sekuliarius narius εt ; dėl jų asimptotiniai artiniai taikytini tik trumpuose laiko intervaluose $t \ll \varepsilon^{-1}$. Periodinių uždavinių tyrimai dar apsunkina rezonansų atsiradimas, dėl to būtina sistemas vidurkinti pagal charakteristikas specialiuoju būdu (kartais vadinamu vidiniu vidurkinimu), kai vidurkinamos dar nerastos funkcijos – uždavinio sprendiniai.

Disertacijoje suformuluoti tokie pagrindiniai darbo uždaviniai: išnagrinėti diferencialinių lygčių asimptotinės analizės metodus, pagrįsti vidurkinimo pagal charakteristikas metodą kvazitiesinių hiperbolinių sistemos atveju. Disertacijoje sprendžiami taikomieji uždaviniai: absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesiniai svyravimai, dujų dinamikos lygčių sistema.

Disertaciją sudaro įvadas, trys skyriai, keturi priedai, rezultatų apibendrinimas, literatūros šaltinių sąrašas ir autorės publikacijų disertacijos tema sąrašas.

Įvadiniamame skyriuje formuluojama problema, aprašytas tyrimų objektas, darbo aktualumas, formuluojami darbo tikslai ir uždaviniai, aprašoma tyrimų metodika, darbo mokslinis naujumas, darbo rezultatų praktinė reikšmė, pateikti ginamieji teiginiai ir disertacijos struktūra. Pabaigoje pristatomi pranešimai konferencijose disertacijos tema.

Pirmajame skyriuje aptartos problemos su kuriomis susiduriama sprendžiant diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemas, kai įeinantys į lygtis netiesiniai nariai proporcingi mažajam parametru ε . Antrajame skyriuje pagrįstas sprendinio egzistavimas ir artumas tiksliam sprendiniui kvazitiesinių hiperbolinių sistemos atveju. Trečiajame skyriuje pateikti rezonansinės bangų sąveikos matematinių modelių pavyzdžiai.

Tyrimų rezultatai paskelbti penkiuose recenzuojamuose mokslo leidiniuose. Šie rezultatai pristatyti keturiolikoje konferencijų.

Abstract

The dissertation focuses on the resonant interaction of some mathematical model of nonlinear waves. They are described by differential equations with partial derivatives when nonlinearity is proportional to a small parameter ε . Solving such tasks for applied specific methods: the averaging and two-scale method, because in the case of a small parameter ε direct expansions have so-called secular members εt ; for this reason, asymptotic approximations are applied in short intervals of time $t \ll \varepsilon^{-1}$ only. A study on periodic tasks is compounded by the emergence of resonances, and therefore the systems must be averaged using a specific method accordingly to characteristics, when undetected functions – the estimates of the task averaged.

Of the work the following tasks are set: to investigate specific asymptotic analysis methods of differential equations; to validate the method of averaging according to characteristics in the case of quasilinear hyperbolic systems; to use the internal averaging method to solving practical tasks: of nonlinear oscillations of the absolutely elastic weightless string, one-dimensional gas dynamics system.

The dissertation consists of an introduction, three chapters, four addends, main conclusions, bibliography and the list of the author's publications. The introductory chapter covers the problem formulation and the object of research, the topicality of the thesis, the aims and objectives of the dissertation, the methodology of research, scientific novelty and the practical value of the achieved results. The defended thesis and structure of the dissertation are given in this chapter.

The first chapter presents problems, where with confront due solving by differential equations and partial derivatives when nonlinear members included in the equations are proportional to a small parameter ε . In the second chapter the presence of the estimate of quasilinear hyperbolic systems and proximity to the exact estimate have been validated. The third chapter presents resonant interaction of some examples of mathematical model.

The research results have been published in 5 scientific articles, 5 of them in the reviewed scientific journals. The results have been presented at 14 conferences.

Turinys

ĮVADAS	1
Problemos formulavimas	1
Darbo aktualumas	2
Tyrimų objektas	3
Darbo tikslas	3
Darbo uždaviniai	3
Tyrimų metodika	3
Darbo mokslinis naujumas	4
Darbo rezultatų praktinė reikšmė	4
Ginamieji teiginiai	4
Darbo rezultatų aprobavimas	5
Disertacijos struktūra	6
Padėka	6
1. ASIMPTOTINĖS ANALIZĖS IDĖJOS IR METODAI	7
1.1. Mažojo parametro metodas. Kelių mastelių principas. Vidurkinimas	7
1.2. Svyravimo uždavinių modeliai	11
1.3. Tamprios švytuoklės matematinis modelis	13
1.4. Pirmojo skyriaus išvados	16

2. KVAZITIESINIŲ HIPERBOLINIŲ SISTEMŲ VIDURKINIMAS PAGAL CHARAKTERISTIKAS	17
2.1. Rezonansai ir vidinis vidurkinimas. Suvidurkintos sistemos analizė	17
2.2. Kvazitiesinių hiperbolinių sistemų vidurkinimo pagal charakteristikas metodo pagrindimas	21
2.2.1. Pagrindinis rezultatas	22
2.2.2. Pagalbiniai teiginiai	23
2.2.3. Teiginių įrodymai	27
2.2.4. Teoremos antrojo teiginio įrodymas	32
2.2.5. Teoremos trečiojo teiginio įrodymas	34
2.3. Antrojo skyriaus išvados	36
3. REZONANSINĖS BANGŲ SAVEIKOS MATEMATINIŲ MODELIŲ PAVYZDŽIAI	37
3.1. Absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesinių svyravimų asimptotika	37
3.1.1. Matematinis modelis	37
3.1.2. Vidurkinimo metodas	39
3.1.3. Suvidurkintoji sistema	40
3.1.4. Asimptotinis sprendinys	41
3.1.5. Nerezonansinis atvejis	42
3.1.6. Rezonansinis atvejis	46
3.1.7. Stygos profilis	47
3.2. Dujų dinamikos lygčių sistemos asimptotinė analizė	49
3.2.1. Uždavinio formulavimas	49
3.2.2. Sistemos užrašymas Rymano invariantais	50
3.2.3. Suvidurkintos sistemos tyrimas	57
3.2.4. Realiųjų dujų analizė	62
3.3. Trečiojo skyriaus išvados	66
BENDROSIOS IŠVADOS	67
LITERATŪROS SAŖAŠAS	69
AUTORĖS MOKSLINIŲ PUBLIKACIJŲ DISERTACIJOS TEMA SAŖAŠAS	73
PRIEDAI	75
A priedas. Algoritmas, specialaus pavidalo artiniams konstruoti	75
B priedas. Dujų dinamikos sistemos pavyzdžiai	79

C priedas. Van der Waalso dujų koeficientai	87
D priedas. Paprastųjų diferencialinių lygčių su mažuoju parametru suvidurkintų sistemų analizė	92

Contents

INTRODUCTION	1
Problem Formulation	1
Topicality of the Research Work	2
Research Object	3
The Aim of the Work	3
The Tasks of the Work	3
Applied Methods	3
Scientific Novelty	4
Practical Value of Work Results	4
Statements Presented for Defence	4
Approval of the Work Results	5
The Scope of the Scientific Work	6
Acknowledgment	6
1. THE IDEAS AND METHODS OF ASYMPTOTIC ANALYSIS	7
1.1. The Small Parameter Method. The principle of Multiple Scaling. Averaging	7
1.2. Models of Oscillation Problems	11
1.3. Mathematical Model of an Elastic Pendulum	13
1.4. Conclusions for Chapter 1	16

2. AVERAGING ALONG THE CHARACTERISTICS OF QUASILINEAR HYPERBOLIC SYSTEMS	17
2.1. Resonant and Internal Averaging. Analysis of the Averaging System	17
2.2. Substation of Averaging Quasilinear Hyperbolic Systems Along Characteristics	21
2.2.1. The main result	22
2.2.2. Auxiliary statements	23
2.2.3. Proofs of statements	27
2.2.4. Proof of the 2nd statement of the theorem	32
2.2.5. Proof of the 3rd affirmation of the theorem	34
2.3. Conclusions for Chapter 2	36
3. EXAMPLES OF MATHEMATICAL MODELS FOR RESONANT WAVE INTERACTIONS	37
3.1. Asymptotics for the Model for nonlinear oscillations of the absolute elastic weightless string	37
3.1.1. Mathematical model	37
3.1.2. Method of averaging	39
3.1.3. Averaging system	40
3.1.4. Approximation of solutions	41
3.1.5. Nonresonance case	42
3.1.6. Resonance case	46
3.1.7. Profile of string	47
3.2. Asymptotic Analyse of Gas Dynamics System	49
3.2.1. Formatting the task	49
3.2.2. Riemann invariants	50
3.2.3. Investigation of averaging system	57
3.2.4. Consider of real gas	62
3.3. Conclusions for Chapter 3	66
GENERAL CONCLUSIONS	67
REFERENCES	69
LIST OF THE AUTHOR'S SCIENTIFIC PUBLICATIONS ON THE TOPIC OF DISSERTATION	73
ADDENDAS	75

Addenda A. Algorithm intended for making the approximations of a special form	75
Addenda B. Examples of the gas dynamics system	79
Addenda C. Coefficients of the Van der Waals gas	87
Addenda D. Analysis of averaged systems of the simple differential equations with a small parameter	92

Įvadas

Problemos formulavimas

Darbe nagrinėjami silpnai netiesiniai svyravimai, aprašomi diferencialinėmis lygtimis dalinėmis išvestinėmis, kai įeinantys į diferencialines lygtis netiesiniai nariai yra proporcingi mažajam parametru ε . Esant mažojo parametro reikšmei $\varepsilon = 0$, nagrinėjamos diferencialinės lygtys tampa tiesinėmis ir sprendžiamos tiksliai gerai žinomais metodais. Tačiau, kai $\varepsilon > 0$, atsiranda sudėtingi sąveikos reiškiniai, kurių įtaka auga laikui t bėgant ir taikymams yra svarbus procesas iki laiko reikšmių $t \sim \varepsilon^{-1}$ – vadinamajame ilgajame laiko intervale ($t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$), nes paprastai šiame intervale egzistuoja nagrinėjamų uždavinių klasikiniai sprendiniai. Atkreiptinas dėmesys į tai, kad sprendžiant tokius uždavinius, kai $\varepsilon \rightarrow 0$ skaitiniais metodais mažėja pastarųjų efektyvumas, nes ilgajame intervale reikia imti vis daugiau skirtuminių schemų mazgų. Kita vertus, asimptotiniai artiniai, kai juos pavyksta sukonstruoti tinkamais ilgajam laiko intervalui, yra tuo artimesni tiksliesiems uždavinių sprendiniams, kuo mažesnės ε reikšmės.

Silpnai netiesinių hiperbolinių bangų sąveikai modeliuoti tradiciškai taikomas mažojo parametro metodas. Tiesioginiai skleidiniai mažojo parametro ε laipsniais bendruoju atveju turi vadinamuosius sekuliarius narius (Nayfeh 1981) εt ; dėl jų asimptotiniai artiniai taikytini tik trumpuose laiko intervaluose

$t \ll \varepsilon^{-1}$. Tolygiai tinkamam, kai $t \sim \varepsilon^{-1}$ asimptotiniam artiniui konstruoti reikalingi specifiniai asimptotinės analizės metodai, tarp kurių ypatingai svarbūs yra kelių mastelių ir vidurkinimo. Periodinių uždavinių tyrimą dar apsunkina rezonansų atsiradimas, dėl to būtina sistemas vidurkinti pagal charakteristikas specialiuoju būdu (kartais vadinamu vidiniu vidurkinimu (Krylovas 1989)), kai vidurkinamos dar nerastos funkcijos – uždavinio sprendiniai. Tai reiškia, kad asimptotikai konstruoti reikia spręsti naują uždavinį – suvidurkintąją sistemą, kuris gali pasirodyti sudėtingesniu už pradinį. Šios suvidurkintosios sistemos vertė asimptotinėje analizėje yra ta, kad į ją tiesiogiai neįeina mažasis parametras ε ir todėl ji neturi asimptotinio integravimo problemų. Dažnai tokios sistemos paliekamos neišspręstos, kaip atskiras objektas (Arora 2008), (Sharma, Srinivasan 2005). Taip pat jie buvo sprendžiamas skaitiniais metodais (Krylovas, Čiegis 2001). Kartais vidinis vidurkinimas, kai vidurkinamos dar nerastos funkcijos, taikomas netiesiogiai, sprendžiant konkrečius asimptotinius uždavinius. Norint pritaikyti asimptotinius artinius taikomiesiems uždaviniams, galima spręsti gaunamus uždavinius skaitiniais metodais. Čia reikėtų kalbėti apie asimptotinės analizės kryptį – skaitinius asimptotinius metodus (Bakhvalov, Panasenko, Štaras 1987). Tai šiek tiek prieštarauja asimptotinių metodų taikymo tradicijoms, kai gaunamos paprastos inžinerinės formulės.

Kalbant bendrai, galima išvelgti tam tikrą asimptotinės analizės problemą – asimptotikai rasti konstruojamas naujas objektas, kuris reikalauja atskiro netrivialaus tyrimo.

Darbo aktualumas

Nepaisant to, kad suvidurkintos sistemos

$$\frac{\partial v_j}{\partial \tau} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_j(s, y_j + \lambda_j s, v_1(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_1)s), \dots, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial y_n}(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_n)s)) ds$$

atsirado literatūroje gana seniai (Kalyakin 1989), (Krylovas, Štaras 1984), tai nėra išsamiai ištirtas objektas. Bendruoju atveju, kai funkcijos f_j priklauso nuo dalinių išvestinių t. y., kvazitiesinių hiperbolinių sistemų atveju nebuvo įrodyta sistemos sprendinio egzistavimas ir artumas tiksliam sprendiniui. Tai yra N. N.

Bogoliubovo teoremos analogas. Iki šiol tai buvo padaryta tik pusiau tiesinėms hiperbolinėms sistemoms, t. y. funkcijos f_j nepriklauso nuo dalinių išvestinių $\frac{\partial u_i}{\partial x}$.

Tyrimų objektas

Disertacijos tyrimo objektas – suvidurkintoji lygčių sistema su periodinėmis pradinėmis sąlygomis.

Darbo tikslas

Atlikti suvidurkintos hiperbolinės sistemos analizę, leidžiančią perrašyti ją patogesniu tyrimams pavidalu ir sukonstruoti specialaus pavidalo asimptotinius artinius, nagrinėjant taikymo pavyzdžius.

Darbo uždaviniai

Siekiant numatytų darbo tikslų buvo sprendžiami šie uždaviniai:

1. Išnagrinėti diferencialinių lygčių mažojo parametro tyrimo metodą ir specifinius kelių mastelių ir vidurkinimo asimptotinės analizės metodus.
2. Pagrįsti vidurkinimo pagal charakteristikas metodą kvazitiesinių hiperbolinių sistemų atveju.
3. Pritaikyti vidinio vidurkinimo metodą kai kuriems praktiniams uždaviniams spręsti.
4. Sudaryti ir realizuoti Maple terpėje algoritmą, skirtą specialaus pavidalo artiniams konstruoti.

Tyrimų metodika

Darbe panaudoti diferencialinių lygčių mažojo parametro tyrimo metodas, specialieji asimptotinės analizės vidurkinimo ir kelių mastelių metodai, eksperimentams atlikti „Maple“ terpėje buvo realizuoti artinių konstravimo algoritmai.

Darbo mokslinis naujumas

Disertacijoje įrodytos lemos leido supaprastinti suvidurkintą diferencialinę lygčių sistemą ir užrašyti ją pavidalu, analogišku pusiau tiesinės hiperbolinės sistemos, užrašytos Rymano invariantais. Tai leido įrodyti suvidurkintos sistemos sprendinio egzistavimą ir jo artumą tiksliam sprendiniui kvazitiesinių hiperbolinių sistemų.

Nagrinėjamiems konkrečioms uždaviniams konstruojami asimptotiniai artiniai, kurie labiau atitinka asimptotinės analizės tradicijas ir patogesni už skaitinius praktiniam modelių tyrimui.

Dujų dinamikos diferencialinėms lygtims sukonstruota tolygiai tinkama ilgajame laiko intervale asimptotinė aproksimacija. Nustatytos sąlygos, kurioms esant, Van der Waalso dujose, palyginus su idealiomis dujomis, neatsiranda rezonansas.

Darbo rezultatų praktinė reikšmė

Vidinio vidurkinimo metodas leidžia spręsti dujų ir hidrodinamikoje, tamprumo teorijoje, plazmos fizikoje, optikoje, mechanikoje taikomuosius uždavinius. Šiuo metodu spręstiems uždaviniams gaunami asimptotiniai artiniai patogiu pavidalu (inžinerinės formulės), kurių tikslumą galima lengvai kontroliuoti.

Ginamieji teiginiai

1. Suvidurkinta pagal charakteristikas sistema turi sprendinį, asimptotiškai artimą kvazitiesinės hiperbolinės sistemos tiksliajam sprendiniui ilgajame laiko intervale.
2. Patogesnis tyrimams suvidurkintų sistemų pavidalas gaunamas taikant įrodytas disertacijoje lemas.
3. Analizinio pavidalo asimptotiniai artiniai gaunami taikomiesiems uždaviniams taikant bendrą metodiką ir turi nesunkiai kontroliuojamą tikslumą.
4. Van der Waalso dujose neatsiranda rezonansas, esant nustatytiems dujų parametrų sąryšiams, kurie negalioja idealioms dujoms.

Darbo rezultatų apibavimas

Disertacijoje aprašytų tyrimų rezultatai paskelbti 5 moksliniuose straipsniuose: 5 straipsniai publikuoti recenzuojamuose mokslo leidiniuose, iš jų vienas – leidinyje įtrauktame į MII *Web of Science* duomenų bazę. Autorės publikacijos pateiktos disertacijos pabaigoje.

Disertacijos tema perskaityti 14 pranešimų Lietuvos ir tarptautinėse konferencijose:

1. Lavcel O. Integralinės diferencialinės sistemos apytikslų sprendinių konstravimas. „Mokslas – Lietuvos ateitis“, 2009.
2. Lavcel O., Krylovas A. Absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesinių svyravimų asimptotikos tyrimas, LMD konferencija 2009.
3. Lavcel O. Absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesinių svyravimų matematinis modeliavimas. Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijos „Mokslas – Lietuvos ateitis“, Vilnius 2010.
4. Lavcel-Budko O. Gravitacinė švytuoklė ant tampraus siūlo, 15-oje Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijos „Mokslas – Lietuvos ateitis“, Vilnius 2012.
5. Lavcel-Budko O., Krylovas A. Vidurkinimo išilgai hiperbolinės sistemos charakteristikų operatoriaus savybės, LMD konferencija, 2012.
6. Lavcel-Budko O., Krylovas A., Miškinis P. Judėjimo lygčių atskyrimas dvimatės gravitacinės švytuoklės modelyje, LMD konferencija, 2012.
7. Lavcel-Budko O. Silpnai netiesinių hiperbolinių sistemų vidurkinimas pagal charakteristikas. Metodo pagrindimas kvazitiesinėms sistemoms, LMA III jaunųjų mokslininkų konferencija „Fizikinių ir technologijos mokslų tarp dalykiniai tyrimai“, 2013.
8. Lavcel-Budko O. Vidurkinimo pagal charakteristikas metodo pagrindimas kvazitiesinėms hiperbolinėms sistemos, 16-oje Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijos „Mokslas – Lietuvos ateitis“, Vilnius 2013.
9. Lavcel-Budko O., Krylovas A. Vienmačio dujų dinamikos uždavinio sprendinio asimptotinis aproksimavimas, LMD konferencija, Vilnius 2013.
10. Lavcel-Budko O., Krylovas A. Foundation of the method of averaging along characteristics of the quasilinear hyperbolic systems, LMD konferencija, Vilnius 2013.

11. Lavcel-Budko O. Vienmačio dujų dinamikos uždavinio sprendinio asimptotinio aproksimavimo pritaikymas realiųjų dujų būsenos lygtims, LMA IV jaunųjų mokslininkų konferencija „Fizikinių ir technologijos mokslų tarp dalykiniai tyrimai“, 2014 m.
 12. Lavcel-Budko O. Rezonansų atsiradimo sąlygos akustinių periodinių bangų sąveikos modelyje, 17-oje Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijos „Mokslas – Lietuvos ateitis“, Vilnius 2014
 13. Lavcel-Budko O., Krylovas A. Resonance interaction of acoustic periodic waves in non-ideal gas. 19th International Conference Mathematical Modelling and Analysis. Druskininkai, 26-05-2014.
 14. Lavcel-Budko O., Krylovas A. Rezonansų atsiradimo sąlygos akustinių periodinių bangų sąveikos modelyje, LMD konferencija, Vilnius 2014.
- Tyrimo rezultatai buvo pristatyti 3 Vilniaus Gedimino technikos universiteto Matematinio modeliavimo katedros seminaruose.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, 3 skyriai, išvados, literatūros sąrašas ir 4 priedai. Skyriai yra suskaidyti į poskyrius. Disertacijoje naudojama numeracija „skyrius.poskyris“, „skyrius.paveikslėlis“, „skyrius.lentelė“ ir t. t. Formulės yra numeruojamos kiekviename skyriuje atskirai, t. y. „skyrius.numeris“.

Darbo apimtis yra 100 puslapių, kuriuose pateikta 318 formulių, 9 paveikslai ir 12 lentelių. Disertacijoje remtasi 63 kitų autorių literatūros šaltiniais.

Padėka

Esu dėkinga savo mokslinio darbo vadovui prof. dr. Aleksandriui Krylovui už skirtą laiką, konsultacijas ir pagalbą; prof. habil. dr. Raimondui Čiegiui ir prof. dr. Pauliui Miškiniui už pastabas ir patarimus, rengiant disertaciją; prof. habil. dr. Antanui Čeniui ir prof. habil. dr. Feliksui Ivanauskui už recenzavimą, padėjusius patobulinti disertaciją. Dėkoju Matematinio modeliavimo katedros kolektyvui už pagalbą ir palaikymą, taip pat už gerą atmosferą darbe. Ačiū mano artimiesiems už kantrybę ir supratingumą.

1

Asimptotinės analizės idėjos ir metodai

Svyravimo procesai silpnai netiesinėje aplinkoje aprašomi diferencialinėmis lygtimis su mažu parametru. Tokie procesai sistemose su baigtinių laisvės laipsnių skaičiumi buvo nagrinėjami taikant Krylovo-Bogoliubovo-Mitropolsko metodą. Šiame skyriuje parodyta, kad tradiciškai taikomas mažo parametro metodas netinka, nagrinėjant greitus svyravimus silpnai netiesinėse aplinkose. Norint gauti tolygiai tinkamą asimptotinę artinį, kai $t \sim \varepsilon^{-1}$ reikia taikyti specifinius asimptotinės analizės metodus. Taip pat didelis dėmesys skiriamas rezonansiniams procesams.

1.1. Mažo parametro metodas. Kelių mastelių principas. Vidurkinimas

Kai visi sistemos

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial x} = \varepsilon f_j \left(t, x, u_1, \dots, u_n, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) \quad (1.1)$$

su periodinėmis pradinėmis sąlygomis

$$u_j(0, x; \varepsilon) = u_{0j}(x) \equiv u_{0j}(x + 2\pi) \quad (1.2)$$

koeficientai $\lambda_j = 0$, o erdvinis kintamasis x traktuojamas kaip parametras (analogiškai, jei $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ ir pakeisti kintamąjį $y = x - \lambda t$) gaušime standartinę N. N. Bogoliubovo prasme paprastųjų diferencialinių lygčių sistemą:

$$\frac{du_j}{dt} = \varepsilon f_j(t, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.3)$$

kuriai formuluojame pradines sąlygas

$$u_j(0; \varepsilon) = u_{j0} + \varepsilon u_{j1} + \varepsilon^2 u_{j2} + \dots \quad (1.4)$$

Tarkime, kad $f_j(t + 2\pi, u) \equiv f_j(t, u)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ ir išskleiskime f_j Furjė eilutėmis:

$$f_j(t, u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{jk}(u) e^{ikt}, \quad \mathbf{i} = \sqrt{-1}. \quad (1.5)$$

Tiesioginis (1.3) sistemos sprendinio skleidinys mažojo parametro ε laipsniais

$$u_j(t; \varepsilon) = u_j^{(0)}(t) + \varepsilon u_j^{(1)}(t) + \varepsilon^2 u_j^{(2)}(t) + \dots \quad (1.6)$$

reikalauja spręsti Koši uždavinius

$$\frac{du_j^{(s+1)}}{dt} = f_j^{(s)}(t, u^{(s)}), \quad u_j^{(s+1)}(0) = (u_{1,s+1}, u_{2,s+1}, \dots, u_{n,s+1}), \quad (1.7)$$

čia $f_j^{(s)}$ – funkcijų f_j Teiloro formulių koeficientai, gaunami įrašius į (1.3) vietoje funkcijų u_j atitinkamus reiškinius (1.6). Kai $s = 0$, turime $u^{(0)}(t) \equiv u_{j0}$, o iš (1.7) ir iš (1.5) gauname:

$$u_j^{(1)}(t) = u_{j1} + t f_{j0}(u_{10}, \dots, u_{n0}) + \sum_{k \neq 0} f_{jk}(u_{10}, \dots, u_{n0}) \frac{e^{ikt} - 1}{ik}. \quad (1.8)$$

Matome, kad (1.6) skleidinio funkcija $u_j^{(1)}(t)$ nėra aprėžta, kai $t \rightarrow +\infty$, o kai $t \sim \varepsilon^{-1}$, dėl sekuliariųjų narių $t f_{j0}$ jau nėra teisingas artinys $u_j(t; \varepsilon) \approx u_j^{(0)}(t)$.

Pastebėję, kad $f_{j0}(u) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_j(t, u) dt \equiv \langle f_j \rangle(u)$ galime manyti, kad (1.6) skleidinio funkcijas tikslinga pakeisti bendresnėmis funkcijomis $v_j^{(s)}(t; \varepsilon)$, kurioms ieškoti konstruojami nauji uždaviniai. Funkcijoms v_j^0 ieš-

koti sudarome suvidurkintąją sistemą:

$$\frac{dv_j^{(0)}}{dt} = \varepsilon \langle f_j \rangle (v^{(0)}). \quad (1.9)$$

Pažymėję lėtąjį laiką $\tau = \varepsilon t$ (tai dviejų mastelių principas) ir $v^{(0)}(t; \varepsilon) = v(\tau)$ gauname, kad $\frac{dv}{dt} = \varepsilon \frac{dv}{d\tau}$ ir eliminuojame mažąjį parametą ε iš suvidurkintosios sistemos:

$$\frac{dv_j}{d\tau} = \langle f_j \rangle (v). \quad (1.10)$$

Klasikinis asimptotinės analizės rezultatas yra sąlygų, kurios garantuoja, kad funkcijos $u_j(t; \varepsilon)$ yra artimos funkcijoms $v_j(\varepsilon t)$, kai $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$, o $\varepsilon \rightarrow 0$, nustatymas – literatūroje vadinamas N. N. Bogoliubovo teorema (Bogoliubov, Mitropolsky 1961).

Čia aptartas problemas paaiškina šis elementarus pavyzdys:

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon(1 + \sin t)u, \quad u(0; \varepsilon) = e^{-\varepsilon} = 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \quad (1.11)$$

Tikslusis (1.11) uždavinio sprendinys $u(t; \varepsilon) = e^{\varepsilon(t - \cos t)}$, o (1.6) skeidinio pirmieji nariai: $u^{(0)}(t) = 1$, $u^{(1)}(t) = t - \cos t$. Matome, kad atsirado sekuliarusis narys εt . Suvidurkinta (1.10) sistema šiuo atveju yra $\frac{dv}{d\tau} = v$, $v(0) = 1$. Jos sprendinys yra funkcija $v(\tau) = e^\tau$. Nesunku parodyti, kad $\forall \varepsilon > 0$ ir kai $t \in \left[0, \frac{t^0}{\varepsilon}\right]$, galioja nelygybė $|u(t; \varepsilon) - v(\varepsilon t)| < \varepsilon e^{t^0}$. Pastebėkime, kad šiuo atveju t^0 yra bet kuri teigiama konstanta.

Iliustruosime kelias gaunamų sprendinių analizės procedūras, kurios bus taikomos disertacijoje. Pažymėsime funkcijos $v(\tau)$ artinį antrosios eilės polinomu: $V_2(\tau) = 1 + \tau + \frac{\tau^2}{2}$ ir nagrinėsime laiko kitimo intervalą $\tau \in [0; 0,5]$

arba $t \in \left[0, \frac{0,5}{\varepsilon}\right]$ ir trumpesnį intervalą $t \in \left[0, \frac{0,5}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$. Nagrinėsime skirtumus

$$\begin{aligned} S(\varepsilon) &= \max_{t \in \left[0, \frac{0,5}{\varepsilon}\right]} |u(t; \varepsilon) - v(\varepsilon t)|, \\ S_2(\varepsilon) &= \max_{t \in \left[0, \frac{0,5}{\varepsilon}\right]} |u(t; \varepsilon) - V_2(\varepsilon t)|, \\ S_{\sqrt{\varepsilon}}(\varepsilon) &= \max_{t \in \left[0, \frac{0,5}{\sqrt{\varepsilon}}\right]} |u(t; \varepsilon) - u^{(0)}(t)|. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Skaičiavimo rezultatai pateikti 1.1 lentelėje.

1.1 lentelė. Pavyzdžio sprendinių paklaidos, su skirtingom ε reikšmėm

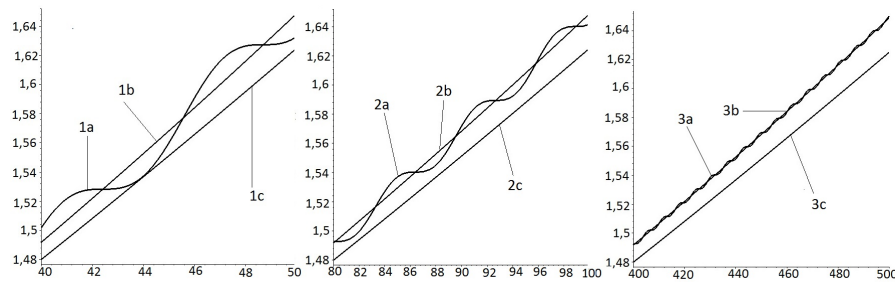
Table 1.1. Errors of the solutions of example as differences ε

ε	$S(\varepsilon)$	$\frac{S(\varepsilon)}{\varepsilon}$	$S_2(\varepsilon)$	$\frac{S_2(\varepsilon)}{\varepsilon}$	$S_{\sqrt{\varepsilon}}(\varepsilon)$	$\frac{S_{\sqrt{\varepsilon}}(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}$
0,1	0,1146	1,4457	0,1509	1,5088	0,1536	0,4859
0,01	0,0161	1,6092	0,0359	3,5871	0,0483	0,4829
0,001	0,0016	1,6486	0,0253	25,305	0,0169	0,5356
0,0001	0,0002	1,6480	0,0239	238,610	0,0049	0,4916
0,00001	0,00002	1,6486	0,0237	2371,55	0,0016	0,4987

Stulpelis $S(\varepsilon)$ rodo, kaip mažėja skirtumas tarp tikslaus ir tolygiai tinkamo ilgajame laiko intervale (gauto iš suvidurkintos sistemos) sprendinių mažėjant ε , o stulpelis $\frac{S(\varepsilon)}{\varepsilon}$ rodo, kad šis skirtumas aprėžtas tam tikra konstanta (šiuo atveju e^{t^0} , $t^0 = 0,5$), tai reiškia, kad $S(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, kai $\varepsilon \rightarrow 0$.

Stulpelis $S_2(\varepsilon)$ rodo, kad tikslumas tarp tikslojo sprendinio ir aproksimacijos $V_2(\varepsilon t)$ nemažėja.

Stulpelis $S_{\sqrt{\varepsilon}}(\varepsilon)$ rodo, kad tiesioginis skleidinys (1.6), turintis sekuliariuosius narius, yra artimas tiksliam trumpesniame laiko intervale $t \in \left[0, \frac{0,5}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$, o paskutinis stulpelis $S_{\sqrt{\varepsilon}}(\varepsilon)$ rodo, kad formulės $u(t; \varepsilon) \approx u^{(0)}(t)$ paklaida yra $O(\sqrt{\varepsilon})$. Kadangi tikslus sprendinys paprastai yra nežinomas, mes naudosime tiesioginius skleidinius kaip tam tikrą suvidurkintų sistemų sprendinių tikrinimo testą.



1.1 pav. Pavyzdžio asimptotikos

Fig. 1.1. Example asymptotic

1.1 paveiksle parodyti funkcijų grafikai: $u(t; \varepsilon)$ – kreivės pažymėtos raide a , $v(\varepsilon t)$ – kreivės b ir $V_2(\varepsilon t)$ – kreivės c . Nagrinėjamas laiko kitimo intervalas $t \in \left[\frac{0,4}{\varepsilon}, \frac{0,5}{\varepsilon} \right]$, o mažojo parametro reikšmės atitinkamai yra: $\varepsilon = 0,01$ – kreivė 1, $\varepsilon = 0,005$ – 2, $\varepsilon = 0,001$ – 3. Matome, kad ilgajame laiko intervale (jo ilgis atitinkamai yra 10, 20 ir 100) skirtumas tarp tiksliojo $u(t; \varepsilon)$ ir sukonstruoto tolygiai tinkamo $v(\varepsilon t)$ sprendinių mažėja mažėjant ε reikšmei. Skirtumas tarp tiksliojo sprendinio ir aproksimacijos $V_2(\varepsilon t)$ nemažėja, kai $\varepsilon \rightarrow 0$, tačiau lieka tos pačios eilės ilgajame laiko intervale.

1.2. Svyravimo uždavinių modeliai

Disertacijoje nagrinėjami rezonansinės bangų sąveikos modeliai, aprašomi diferencialinėmis lygtimis dalinėmis išvestinėmis. Tačiau būdingas problemas galima pamatyti nagrinėjant materialinių taškų sistemų svyravimus, aprašomus paprastomis diferencialinėmis lygtimis:

$$u_j'' + \omega_j^2 u_j = \varepsilon f_j(u, u'), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.13)$$

Kai $\varepsilon = 0$, (1.13) sistemos sprendinys yra funkcijos $u_j(t) = a_j \cos(\omega_j t + \varphi_j)$. Vidurkinimo metodo idėja – pakeisti šioje formulėje konstantas a_j , φ_j nežinomomis funkcijomis $a_j(t; \varepsilon)$, $\varphi_j(t; \varepsilon)$ ir pareikalauti, kad funkcijos $u_j(t)$

pirmoji išvestinė būtų lygi:

$$u'_j(t) = -a_j \omega_j \sin(\omega_j t + \varphi_j), \quad (1.14)$$

t. y. išvestinė lygi tam reiškiniui, kuris gaunamas, kai a_j, φ_j yra konstantos. Tam, kad užtikrinti (1.14) reikalavimą, sudaroma lygtis:

$$a'_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) - a_j \varphi'_j \sin(\omega_j t + \varphi_j) = 0. \quad (1.15)$$

Tada įrašius $u_j(t) = a_j \cos(\omega_j t + \varphi_j)$ į (1.13), neatsiranda antrosios eilės išvestinės ir gaunama antroji lygtis:

$$-a'_j \omega_j \sin(\omega_j t + \varphi_j) - a_j \varphi'_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) = \varepsilon f_j(\dots). \quad (1.16)$$

Iš (1.15), (1.16) gaunama pirmosios eilės standartinė (1.3) pavidalo sistema (plačiau žr. D priede):

$$\begin{cases} a'_j = -\frac{\varepsilon}{\omega_j} f_j(\dots) \sin(\omega_j t + \varphi_j), \\ \varphi'_j = -\frac{\varepsilon}{a_j \omega_j} f_j(\dots) \cos(\omega_j t + \varphi_j). \end{cases} \quad (1.17)$$

Pažymėsime $y_j = \omega_j t + \varphi_j$. Tada (1.17) sistemą galime perrašyti tokiu pavidalu (t. y. gauti (1.3) standartinio pavidalo sistemą, kuriai taikytinas vidurkinimo metodas):

$$u'_j = \varepsilon F_j(y_1, y_2, \dots, y_n, u), \quad (1.18)$$

čia funkcijos F_j yra periodinės su periodu 2π pagal kiekvieną kintamąjį y_j . Jei funkcijos F_j yra pakankamai glodžios (tolydžiai diferencijuojamos), jas galima išskleisti konverguojančiomis Furjė eilutėmis (Fichtengolcas 1967)

$$F_j(y, u) = \sum_{\mathbf{k} \in Z^n} F_{j\mathbf{k}}(u) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{y})}, \quad (1.19)$$

čia

$$F_{j\mathbf{k}}(u) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F_j(y, u) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{y})} dy_1 dy_2 \dots dy_n, \quad (1.20)$$

$$(\mathbf{k}, \mathbf{y}) = k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n.$$

Pažymėsime rezonansinių vektorių aibę

$$\mathcal{R}_\omega = \{\mathbf{k} \in Z^n : (\mathbf{k}, \omega) = 0\}.$$

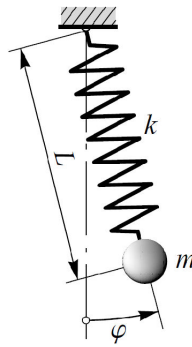
Tada gauname, kad funkcijos F_j vidurkis pagal kintamąjį t :

$$\langle F_j \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_j(\omega_1 t + \varphi_1, \omega_2 t + \varphi_2, \dots, \omega_n t + \varphi_n, u) dt = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{R}_\omega} F_{j\mathbf{k}}(u) e^{i(\mathbf{k}, \varphi)}. \quad (1.21)$$

Pastebėkime, kad suvidurkintoji sistema turi tą patį pavidalą (1.9), tačiau rezonanso atveju (1.21) vidurkis nelygus vidurkiui $\frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F_j(y, u) dy_1 dy_2 \dots dy_n = F_{j\mathbf{0}}(u)$, nes tada aibė \mathcal{R}_ω turi ne tik elementą $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

1.3. Tamprios švytuoklės matematinis modelis

Klasikinės matematinės švytuoklės modelyje (Magnus 1982) naudojamos pakabos nesvarumo, netęsimo ir absoliutaus tamprumo prielaidos. Tamprios matematinės švytuoklės modelyje lieka galiojančiomis pakabos nesvarumo ir absoliutaus tamprumo prielaidos, tačiau netęsimo prielaidos atsisakoma. Tai reiškia, kad kartu su senu dinaminio kintamuoju – atsilenkimo kampų $\varphi = \varphi(t)$, turime papildomą kintamąjį – pakabos ilgį $L = L(t)$.



1.2 pav. Tamprios švytuoklės matematinis modelis

Fig. 1.2. Mathematical model of elastic pendulum

Masės m ir nykstantai mažų išmatavimų kūnas (materialusis taškas) pakabinamas ant tamprumo k spyruoklės, galintis laisvai judėti gravitaciniame lauke, apibūdinamas Lagranžo funkcija:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (L^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{L}^2) - \frac{k}{2} (L - L_0)^2 - mgh, \quad (1.22)$$

čia

$$h = L_0(1 - \cos \varphi) - (L - L_0) \cos \varphi = L_0 - L \cos \varphi \quad (1.23)$$

yra pakyla virš neištemptos ilgio L_0 pakabos pusiausvyros padėties. Iš Lagranžo funkcijos \mathcal{L} ir funkcijos h išraiškų (1.22), (1.23) seka judėjimo lygtys:

$$\begin{cases} m\ddot{L} - mL\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi + k(L - L_0) = 0, \\ L\ddot{\varphi} + 2\dot{L}\dot{\varphi} + g \sin \varphi = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Nagrinėsime (1.24) sistemą. Ši sistema Magnus (1982) monografijoje iki galo neišspręsta. Judėjimo lygtyse (1.24) pereiname prie bedimensinių kintamųjų ir funkcijų:

$$l = \frac{L}{L_0}, \quad \omega_x^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_\varphi^2 = \frac{g}{L_0}, \quad \omega^2 = \frac{\omega_x^2}{\omega_\varphi^2}, \quad \tau = \omega_\varphi t. \quad (1.25)$$

Tada (1.24) judėjimo lygtys bedimensinės formos atrodo taip:

$$\begin{cases} \ddot{l} - l\dot{\varphi}^2 - \cos \varphi + \omega^2(l - 1) = 0, \\ l\ddot{\varphi} + 2\dot{l}\dot{\varphi} + \sin \varphi = 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Esant prielaidoms, kad svyravimai turi mažą fazę ir švytuoklės ilgis mažai kinta

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varepsilon \tilde{\varphi}(t),$$

$$l(t, \varepsilon) = l_0 + \varepsilon \tilde{l}(t), \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

gaunama dviejų antrosios eilės paprastųjų diferencialinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{l}} + \omega_l^2 \tilde{l} = \varepsilon(l_0 \dot{\tilde{\varphi}}^2 - \frac{\tilde{\varphi}^2}{2}), \\ \ddot{\tilde{\varphi}} + \omega_\varphi^2 \tilde{\varphi} = \varepsilon(-\omega_\varphi^2 \tilde{l} \ddot{\tilde{\varphi}} - 2\omega_\varphi^2 \tilde{l} \dot{\tilde{\varphi}}). \end{cases} \quad (1.27)$$

Pažymėta: ω_l – ilgio dažnis, ω_φ – svyravimo dažnis, $F_1 = l_0 \dot{\tilde{\varphi}}^2 - \frac{\tilde{\varphi}^2}{2}$, $G_1 = \omega_\varphi^4 \tilde{l} \ddot{\tilde{\varphi}} - 2\omega_\varphi^2 \tilde{l} \dot{\tilde{\varphi}}$.

Sistemos asimptotinių sprendinių konstruojame vidurkinimo metodu (žr. disertacijos 13 psl.), $a(t, \varepsilon)$, $\alpha(t, \varepsilon)$, $b(t, \varepsilon)$, $\beta(t, \varepsilon)$ – nežinomieji, parametrus ω_φ , ω_l – nustatome iš karto ($\omega_l = 2$, $\omega_\varphi = 1$) (plačiau žr. D priedą).

Pritaikius dviejų mastelių ir vidurkinimo metodus, gauname dvi funkcijas:

$$\tilde{l} = \left(1 - \frac{287}{2048} \tau^2\right) \cos\left(2t + \frac{7}{32} \tau\right), \quad (1.28)$$

$$\tilde{\varphi} = \left(1 + \frac{123}{256} \tau^2\right) \cos\left(t + \frac{3}{4} \tau\right). \quad (1.29)$$

Pakeitę τ į εt , gauname

$$\tilde{l}_v(t; \varepsilon) = \left(1 - \frac{287}{2048} \varepsilon^2 t^2\right) \cos\left(2t + \frac{7}{32} \varepsilon t\right), \quad (1.30)$$

$$\tilde{\varphi}_v(t; \varepsilon) = \left(1 + \frac{123}{256} \varepsilon^2 t^2\right) \cos\left(t + \frac{3}{4} \varepsilon t\right). \quad (1.31)$$

Išsprendę (1.27) sistemą dar ir tiesioginio skleidinio metodu gauname rezultata:

$$\tilde{l}_t(t) = \cos(2t) + \varepsilon \left(\frac{3}{32} - \frac{3}{32} \cos(2t) - \frac{7}{32} \sin(2t)t\right), \quad (1.32)$$

$$\tilde{\varphi}_t(t) = \cos(t) + \varepsilon \left(\frac{5}{4} \cos(t) - \frac{5}{4} \cos(t)^3 - \frac{3}{4} \sin(t)t\right). \quad (1.33)$$

Palyginkime du sistemos sprendinius, gautus vidurkinimo (1.28), (1.30) bei tiesioginio skleidimo (1.32), (1.33) metodais. Mažindami mažąjį parametą ε skaičiuojame maksimalias paklaidas:

$$\begin{aligned} S_{\sqrt{\varepsilon}}^1(\varepsilon) &= \max_{t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]} |\tilde{l}_v(t) - \tilde{l}_t(t)|, \\ S_{\sqrt{\varepsilon}}^2(\varepsilon) &= \max_{t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]} |\tilde{\varphi}_v(t) - \tilde{\varphi}_t(t)|. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Iš (1.30)–(1.33) matome, kad $S_{\sqrt{\varepsilon}}^{1,2}(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$. Tai leidžia naudoti tiesioginį skleidinį (1.32), (1.33), kaip tam tikrą testą, kai $t \in \left[0, O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]$. Artinys (1.28), (1.29) gautas iš suvidurkintos sistemos, taikytinas iki laiko eilės $t \sim \varepsilon^{-1}$, nes jo tikslumas yra tos pačios eilės taip, kaip buvo parodyta

12 psl. nagrinėjant dydžius (1.10).

1.4. Pirmojo skyriaus išvados

1. Greitiems svyravimams silpnai netiesinėse aplinkose klasikinis mažo parametro metodas netinka asimptotiniam artiniui gauti, kai $t \sim \varepsilon^{-1}$ dėl sekuliariųjų narių εt .
2. Norint sukonstruoti tinkamą artinį, reikia taikyti specifinius asimptotinės analizės metodus: kelių mastelių ir vidurkinimo.
3. Periodinė pradinė sąlyga dar labiau apsunkina uždavinių sprendimą, dėl vidinių rezonansų.

2

Kvazitiesinių hiperbolinių sistemų vidurkinimas pagal charakteristikas

Šiame skyriuje nagrinėjamos kvazitiesinės hiperbolinės pirmosios eilės diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemos. Bendru atveju tokios sistemos turi klasikinį sprendinį tik apibrėžtoje srityje, nes joms būdingas neaprežtas sprendinių išvestinių didėjimas (gradientinė katastrofa). Disertacijoje nagrinėjami periodiniai uždaviniai su mažuoju parametru ε turi klasikinį sprendinį intervale $t \in \left[0, \frac{t^0}{\varepsilon}\right]$, čia t^0 – nepriklausanti nuo ε teigiama konstanta. Šio skyriaus medžiaga paskelbta autorės publikacijoje (Lavcel-Budko 2012).

2.1. Rezonansai ir vidinis vidurkinimas. Suvidurkintos sistemos analizė

Kai funkcijos f_j , u_{0j} yra pakankamai glodžios (tolydžiai diferencijuojamos), (2.1) Koši uždavinys turi klasikinį sprendinį ilgajame laiko intervale $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$ (Rozhdestvenskii, Yanenko 1978). Tolygiai tinkamą šiame intervale asimptotinį sprendinį leidžia gauti vidinio vidurkinimo metodas. Šio

metodo pagrindinė idėja ta, kad sistemoje

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial x} = \varepsilon f_j(t, x, U, U_x), \quad (2.1)$$

$$u_j(0, x) = u_{0j}(x), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

funkcijos $f_j(t, x, v_1(\tau, y_1), \dots, v_n(\tau, y_n))$ vidurkinamos ne tik pagal greituosius kintamuosius t ir x , bet vidurkinamos dar nežinomos funkcijos $v_1(\tau, y_1), \dots, v_n(\tau, y_n)$ ir vidurkinama pagal nesutrukdytosios sistemos charakteristikas taip kaip sistemoje (1). Pažymėsime jos dešinę pusę $M_j[f_j]$.

$$M_j[f_j] \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_j(\tau, y_j + \lambda_j s, \quad (2.2)$$

$$v_1(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_1)s), \dots, v_n(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_n)s) ds.$$

Tada (2.1) sistemos asimptotinis artinys

$$u_j(tx; \varepsilon) \approx v_j(\varepsilon t, x - \lambda_j t) + O(\varepsilon)$$

yra suvidurkintos sistemos

$$\frac{\partial v_j}{\partial \tau} = M_j[\dots, v_i(\tau, y_j), \dots], \quad v_j(0, y_j) = u_{0j}(y_j)$$

sprendinys.

Pavyzdys

Išnagrinėsime Košį uždavinį sistemai

$$\begin{cases} u_t + u_x = \varepsilon \cos(t)v, & v_t = 0, \\ u(0, x; \varepsilon) = 0, & v(0, x) = \sin(x). \end{cases} \quad (2.3)$$

Vidurkinimo metodo pritaikymas (1 skyrius, 10 psl.), priveda prie naujo uždavinio

$$\begin{cases} u_{1t} + u_{1x} = 0, & v_{1t} = 0, \\ u_1(0, x) = 0, & v_1(0, x) = \sin(x), \end{cases} \quad (2.4)$$

kurio sprendinys: $u_1 \equiv 0, \quad v_1 = \sin(x)$. Bet jis skiriasi nuo tiksliojo sprendinio

$$u(t, x; \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{4} (\sin(x - t) - \sin(x - t) - 2t \cos(x - t)),$$

$$v(t, x) = \sin(x),$$

kai $t \sim \varepsilon^{-1}$ dydžiu eilės $O(1)$, nes atsirado sekuliarusis narys εt .

Kaip matome, išorinis vidurkinimas neleidžia šiuo atveju sukonstruoti tinkamos asimptotikos. Nes tam, kad asimptotinis skleidinys būtų tolygiai tinkamas ilgajame intervale $t \sim O(\varepsilon^{-1})$ būtina, kad jis neturėtų sekuliarųjų narių.

Pritaikę (2.3) uždaviniui vidinio vidurkinimo metodą, gausime naują uždavinį:

$$u_\tau + u_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(s) \cdot v(\tau, y_1 + s) ds,$$

$$v_\tau = 0,$$

$$u(0, y_1) = 0, \quad v(0, y_2) = \sin(y_2),$$

čia $\tau = \varepsilon t$, $y_1 = x - t$, $y_2 = x$.

Iš čia gausime, kad $v = \sin(y_2)$ ir

$$u_\tau + u_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(s) \cdot \sin(y_1 + s) ds = \frac{1}{2} \cos(y_1).$$

Suvidurkintos sistemos sprendinys

$$u = \frac{\tau}{2} \cos(y_1) = \frac{\varepsilon t}{2} \cos(x - t), \quad v = \sin(x)$$

skiriasi nuo tikslaus sprendinio $O(\varepsilon)$ eile, ilgajame laiko intervale $(t, x) \in [0, O(\varepsilon^{-1})] \times R$.

Chikwendu, Kevorkian(1972) naudojo vidinį vidurkinimą pagal charakteristikas $x \pm t = const$ kai kuriems svyravimo bangų lygtims spręsti, o Eckhaus (1975) parodė, kad asimptotika, kurią nagrinėjo (Chikwendu, Kevorkian 1972), skiriasi nuo tikslaus sprendinio intervale $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$ eile $O(\varepsilon)$.

Suvidurkintas sistemas su pastoviais koeficientais ir periodinėmis pradinėmis sąlygomis nagrinėjo (Krylovas 1983; Štaras 1978).

Vėliau ši metodika buvo apibendrinta (Krylovas, Štaras 1984) atvejui, kai koeficientai priklauso nuo lėto laiko $\lambda_j = \lambda_j(\tau)$. Analogiškus rezultatus gavo (Kalyakin 1989).

Krylovas (1987) apibendrina vidinio vidurkinimo metodą, kai koeficientai priklauso nuo greitų ir lėtų kintamųjų, bei mažojo parametro ε : $\lambda_j = \lambda_j(t, x, \tau, \xi, \varepsilon)$.

Vidinio vidurkinimo sistema (2.2) pavidalo taip pat nagrinėjo (Hunter, Keller 1988; Maslov 1987; Majda, Rosales 1988).

Dažniausiai tokios sistemos buvo paliekamos be tolesnio tyrimo ir pateikiamos literatūroje, kaip tam tikras asimptotinės analizės rezultatas (Arora 2008; Pelinovsky, Simpson, Weinstein 2012; Sharma, Srinivasan 2005). Straipsniuose (Krylovas 1983; Krylovas, Čiegis 2001) uždaviniai pavidalo (2.1) buvo sprendžiami skaitiniais metodais. Disertantės ir bendraautorijų darbe (Krylovas, Lavcel-Budko, Miškinis 2010) buvo konstruojami asimptotinio sprendinio analizinio pavidalo artiniai.

Straipsniuose (Krylovas 1989, 1990) pateiktas vidurkinimo metodo (2.11), (2.12) pagrindimas pusiau tiesinės (t. y. kai (2.5) funkcijos $f_{ji} \equiv 0, i \neq 0$) sistemos atveju (įrodytos tiksliojo ir asimptotinio sprendinių egzistavimo ir vienviaties teoremos bei jų artumas ilgajame laiko intervale $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$).

Kurihara, Yano (2006) nagrinėdami netiesines sistemas taiko dviejų mastelių metodą, atlieka Furjė analizę, o po to vidurkina. Panašias vidinio vidurkinimo schemas taiko (Gutierrez, Silva Dias, Raupp 2011). (Simpson, Weinstein 2011) kaip ir (Pelinovsky, Simpson, Weinstein 2012) gavę suvidurkintą lygčių sistemą, atlieka jos harmoninę analizę. Minėti autoriai nagrinėjo konkretaus pavidalo uždavinius be bendros teorijos, kai dešinėje pusėje buvo konkrečios funkcijos, kurioms atlikus pertvarkius galima gauti asimptotiką.

Šiame disertacijos skyriuje nagrinėjamas bendras matematinis uždavinys, kuris apibendrina kvazitiesines hiperbolines sistemas, t. y. atvejį, kai (2.5) ir (2.11) sistemų dešinės pusės priklauso nuo dalinių išvestinių $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ ir $\frac{\partial v_i}{\partial y_i}$. Toks apibendrinimas yra svarbus asimptotinės analizės teorinis rezultatas, kuris nebuvo žinomas literatūroje nagrinėjant įvairias hiperbolinių sistemų vidinio vidurkinimo schemas (Mitropolskij, Choma, Gromak 2006).

2.2. Kvazitiesinių hiperbolinių sistemų vidurkinimo pagal charakteristikas metodo pagrindimas

Toliau nagrinėjamas (2.1) uždavinio atskiras atvejis¹ – pirmosios eilės diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis kvazitiesinė hiperbolinė sistema su mažuoju teigiamu parametru ε :

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial x} = \varepsilon \left(f_{j0}(u) + \sum_{i=1}^n f_{ji}(u) \frac{\partial u_i}{\partial x} \right), \quad (2.5)$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n), j = 1, 2, \dots, n,$$

su periodinėmis pradinėmis sąlygomis

$$u_j(0, x; \varepsilon) = u_{0j}(x) \equiv u_{0j}(x + 2\pi). \quad (2.6)$$

Šiame skyriuje raidėmis $D_j^0, F_{ji}^k, U_j^k, (U_j^0 < D_j^0)$ žymėsime teigiamas konstantas, sritį $-D = \{u \in R^n : |u_j| \leq D_j^0\}$. Visos žinomos (2.5), (2.6) uždavinio funkcijos yra tolydžiai diferencijuojamos: $f_{ji} \in C^p(D), p \geq 2, u_{0j} \in C_{2\pi}^q(R), q \geq 2$; indeksas 2π reiškia funkcijų periodiškumą.

Tegul, šios funkcijos ir jų dalinės išvestinės yra apręžtos:

$$\max_{x \in R} \left| \frac{d^k u_{0j}(x)}{dx^k} \right| \leq U_j^k, k = 0, 1, \dots, q,$$

$$\max_{\substack{u \in D \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} \left| \frac{\partial^k f_{ji}(u)}{\partial^{\alpha_1} u_1 \dots \partial^{\alpha_n} u_n} \right| \leq F_{ji}^k, i = 0, 1, \dots, n, k = 0, 1, \dots, p. \quad (2.7)$$

Taip pat tegul visos (2.5) lygčių konstantos λ_j yra skirtingos:

$$(\forall i \neq j) \lambda_i \neq \lambda_j. \quad (2.8)$$

Ši sąlyga garantuoja, kad matrica $\Lambda(u; \varepsilon) = \|\lambda_{ij}\|_{n \times n}, \lambda_{ij} = \begin{cases} \lambda_j + \varepsilon f_{jj}(u), & \text{kai } i = j, \\ \varepsilon f_{ji}(u), & \text{kai } i \neq j, \end{cases}$ esant pakankamai mažoms parametro ε reikšmėms, kai $\varepsilon < \varepsilon^0$ (žr. (2.9) formulę) turės skirtingas tikrines reikšmes $\tilde{\lambda}_j(u, \varepsilon)$.

¹Pastebėkime, kad (2.5) tiesiogiai nepriklauso nuo greitųjų kintamųjų t ir x . Tačiau tai nėra esminis apribojimas, nes į sistemą galima įtraukti lygtis pavidalo $u_t - \lambda u_x = 0$.

Pagal žinomą (žr., pvz., (Lancaster 1969)) Geršgorino teoremą (1937), visoms $\tilde{\lambda}_j$ galioja įvertis

$$\left| \tilde{\lambda}_j - \lambda_j \right| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n F_{ji}^0.$$

Taigi $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ visos tikrinės reikšmės $\tilde{\lambda}_j$ bus skirtingos, jei

$$\varepsilon^0 = \frac{\min_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|}{2 \max_j \sum_{i=1}^n F_{ji}^0}. \quad (2.9)$$

Tokiu atveju (2.5) sistema yra hiperbolinė (Rozhdestvenskii, Yanenko 1978) ir (2.5), (2.6) uždavinys turi klasikinių (tolydžiai diferencijuojamą) sprendinių, kai $t \in \left[0, \frac{t^0}{\varepsilon}\right]$. Čia t^0 – tam tikra teigiama konstanta. Visos konstantos priklauso nuo konstantų F_{ji}^k, U_j^k ir nepriklauso nuo mažojo parametro ε .

Užrašykime vidurkinimo pagal charakteristikas (2.2) operatorių (2.5) sistemai:

$$M_j [g(\tau, y_1, y_2, \dots, y_n)] \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_1)s, \quad (2.10)$$

$$y_j + (\lambda_j - \lambda_2)s, \dots, y_j + (\lambda_j - \lambda_n)s) ds \equiv \langle g \rangle_j (\tau, y_j).$$

Nagrinėsime suvidurkintų lygčių sistemą:

$$\frac{\partial v_j}{\partial \tau} = M_j \left[f_{j0}(v) + \sum_{i=1}^n f_{ji}(v) \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \right], \quad (2.11)$$

$$v(\tau, y) = (v_1(\tau, y_1), v_2(\tau, y_2), \dots, v_n(\tau, y_n)), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

su pradinėmis sąlygomis (2.6), t. y.:

$$v_j(0, y_j) = u_{0j}(y_j) \equiv u_{0j}(y_j + 2\pi). \quad (2.12)$$

2.2.1. Pagrindinis rezultatas

2.1 teorema. Tarkime, kad funkcijos $f_{ji} \in C^2(D)$, $u_{0j} \in C_{2\pi}^2(R)$, $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 0, 1, \dots, n$ ir galioja (2.7)–(2.9) apribojimai. Tada

1) egzistuoja tokia teigiama konstanta t^0 , kad (2.5), (2.6) uždavinys turi

vienintelį sprendinį

$$u_j(t, x; \varepsilon) \in C_{2\pi}^1 \left(\left[0, \frac{t^0}{\varepsilon} \right] \times R \right), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon^0);$$

2) egzistuoja tokia teigiama konstanta τ^0 , kad (2.11), (2.12) uždavinys turi vienintelį sprendinį

$$v_j(\tau, y_j) \in C_{2\pi}^1([0, \tau^0] \times R);$$

3) $\forall \mu > 0, \exists \varepsilon_\mu \in (0, \varepsilon^0)$:

$$\max_{\substack{(t,x) \in [0, \frac{c}{\varepsilon}] \times R \\ j=1,2,\dots,n}} |u_j(t, x; \varepsilon) - v_j(\varepsilon t, x - \lambda_j t)| \leq \mu.$$

Čia $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]$, $c = \min \{t^0, \tau^0\}$.

Pirmas teoremos teiginys yra gerai žinomas hiperbolinėms sistemoms (Rozhdestvenskii, Yanenko 1978), (Courant 1962). Antrąjį ir trečiąjį teoremos teiginius įrodysime šiame skyriuje. Tai yra klasikinės N. N. Bogoliubovo teoremos analogas.

2.2.2. Pagalbiniai teiginiai

Gronwall'o lema (1919)

2.1 lema. Tarkime, kad $U(t), V(t)$ yra tolydžios, kai $t \in [a, b]$ neneigiamos funkcijos ir

$$U(t) \leq U^0 + \int_a^t V(s)U(s)ds. \quad (2.13)$$

Tada ($\forall t \in [a, b]$)

$$U(t) \leq U^0 e^{\int_a^t V(s)ds}. \quad (2.14)$$

Įrodymą žr., (pvz., Hartman (1964)). Monografijoje (Rozhdestvenskii, Yanenko 1978) įrodytas teiginio apibendrinimas.

Charakteristikos

2.2 lema. Tarkime, kad $\lambda(\tau, y) \in C_{2\pi}^1([0, \tau^0] \times R)$. Tada diferencialinė lygtis su pradine sąlyga

$$\frac{dY}{ds} = \lambda(s, Y), \quad Y|_{s=\tau} = y \quad (2.15)$$

turi vienintelį sprendinį

$$Y(s; \tau, y) \in C^1([0, \tau^0] \times [0, \tau^0] \times R)$$

ir funkcija $Y(s; \tau, y) + 2\pi$ yra (2.15) uždavinio sprendinys esant sąlygai

$$Y|_{s=\tau} = y + 2\pi.$$

Įrodymas yra standartinis (pvz., Paulauskas 1961), tačiau pastebėkime, kad nagrinėjamas periodinis uždavinys ir sritis pagal lėtą laiką τ nesumažėja.

Integravimas pagal charakteristikas

2.3 lema. Tarkime, kad $\lambda(\tau, y), g(\tau, y) \in C_{2\pi}^1([0, \tau^0] \times R)$, $v_0(y) \in C_{2\pi}^1(R)$. Tada Koši uždavinys

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \lambda(\tau, y) \frac{\partial v}{\partial y} = g(\tau, y), \quad v(0, y) = v_0(y) \quad (2.16)$$

turi vienintelį sprendinį

$$v(\tau, y) = v_0(Y(0; \tau, y)) + \int_0^\tau g(s, Y(s; \tau, y)) ds. \quad (2.17)$$

Čia $Y(s; \tau, y)$ – funkcijos, apibrėžtos (2.15) uždaviniu.

Formulė (2.17) įrodoma tiesioginiu patikrinimu, įrašant reiškinį į (2.16).

Vidurkinimo operatoriaus savybės

2.4 lema. (Krylovas 1989) Tarkime, kad $\overset{m}{g}, g \in C_{2\pi}^m([0, \tau^0] \times R^n)$ ir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{(\tau, y) \in [0, \tau^0] \times R^n} \left| \overset{m}{g}(\tau, y_1, \dots, y_n) - g(\tau, y_1, \dots, y_n) \right| = 0.$$

Tada $\lim_{m \rightarrow \infty} M_j^m[g] = M_j[g]$, t. y. operatorius M_j yra tolydus.

2.5 lema. (Krylovas 1989) Tarkime, kad $g \in C_{2\pi}^1([0, \tau^0] \times R^n)$. Tada

$$\frac{\partial}{\partial \tau} M_j[g] = M_j \left[\frac{\partial g}{\partial \tau} \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} M_j[g] = \sum_{i=1}^n M_j \left[\frac{\partial g}{\partial y_i} \right].$$

2.6 lema. Tarkime, kad $f_{ji} \in C^1(D)$, $v_j(\tau, y_j) \in C_{2\pi}^1([0, \tau^0] \times R)$,

$$g_j(\tau, y_j) = M_j \left[f_{j0}(v) + \sum_{i \neq j} f_{ji}(v) \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \right]$$

ir galioja (2.8) apribojimas. Tada funkcija $g_j \in C_{2\pi}^1([0, \tau^0] \times R^n)$ ir

$$\frac{\partial g_j}{\partial y_j} = M_j \left[\sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial f_{j0}}{\partial v_l} \frac{\partial v_l}{\partial y_l} + \sum_{i \neq j} \sum_{k \neq j} \frac{\lambda_l - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \frac{\partial f_{ji}}{\partial v_l} \frac{\partial v_l}{\partial y_l} \frac{\partial v_k}{\partial y_k} \right) \right]. \quad (2.18)$$

Įrodymą žr. 2.2.3 poskyryje.

Prailginta suvidurkintoji sistema

Pažymėsime $w_j(\tau, y_j) = \frac{\partial v_j(\tau, y_j)}{\partial y_j}$ ir taikydami 2.6 lemos (2.18) formulę perrašysime (2.11), (2.12) uždavinį:

$$\frac{\partial w_j}{\partial \tau} = M_j [g_{0j}(v, w)], \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial w_j}{\partial \tau} - \langle f_{jj}(v) \rangle_j \frac{\partial w_j}{\partial y_j} = M_j [g_{1j}(v, w)], \quad (2.20)$$

$$v_j(0, y_j) = u_{0j}(y_j), \quad w_j(0, y_j) = u_{1j}(y_j) \equiv \frac{du_{0j}(y_j)}{dy_j}. \quad (2.21)$$

Čia pažymėta:

$$g_{0j} = f_{j0}(v) + \sum_{i=1}^n f_{ji}(v)w_i,$$

$$g_{1j} = \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial f_{j0}(v)}{\partial v_l} w_l + \sum_{i \neq j} \sum_{k \neq j} \frac{\lambda_l - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \frac{\partial f_{ji}(v)}{\partial v_l} w_l w_k \right).$$

Sistemos (2.19)–(2.21) sprendinį konstruosime iteracijomis:

$$v_j^0 \equiv u_{0j}, \quad w_j^0 \equiv u_{1j},$$

$$\frac{\partial v_j^{m+1}}{\partial \tau} = M_j \left[g_{0j}(v^m, w^m) \right], \quad v_j^{m+1}(0, y_j) = u_{0j}(y_j), \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial w_j^{m+1}}{\partial \tau} - \langle f_{jj}(v^m) \rangle_j \frac{\partial w_j^{m+1}}{\partial y_j} = M_j \left[g_{1j}(v^m, w^m) \right], \quad (2.23)$$

$$w_j^{m+1}(0, y_j) = u_{1j}(y_j).$$

2.7 lema. Egzistuoja tokia teigiama konstanta τ^0 , kad visos (2.22), (2.23) funkcijos $v_j^m(\tau, y_j) \in D$, t. y. $|v_j^m| \leq D_j^0$, $|w_j^m| \leq D_j^1$.

Įrodymą žr. 2.2.3 poskyryje.

2.8 lema. Funkcijos v^m, w^m yra tolygiai tolydžios, t. y. egzistuoja tokios konstantos C_1, C_2, C_3, C_4 , kad $(\forall \tau', \tau'', y_j', y_j'' \in [0, \tau^0] \times \mathbb{R}^2)$, $k \in N$

$$\left| v_j^m(\tau', y_j') - v_j^m(\tau'', y_j'') \right| \leq C_1 |\tau' - \tau''| + C_2 |y_j' - y_j''|,$$

$$\left| w_j^m(\tau', y_j') - w_j^m(\tau'', y_j'') \right| \leq C_3 |\tau' - \tau''| + C_4 |y_j' - y_j''|.$$

Įrodymą žr. 2.2.3 poskyryje.

Kvaziperiodinės funkcijos integralas

Tarkime, kad funkcija $g(\tau, y_1, y_2, \dots, y_n)$ yra 2π – periodinė pagal kiekvieną kintamąjį y_i . Funkciją $g_j(\tau, t, y_j) = g(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_1)t, \dots, y_j + (\lambda_j -$

$\lambda_n)t$ vadinama kvaziperiodine pagal kintamąjį t . Žinoma (pvz. Samoilenko (1987)), kad funkcijos g_j integralas

$$g_j^t(\tau, t, y_j) = \int_0^t g_j(\tau, s, y_j) ds$$

yra kvaziperiodinė pagal t , kai funkcija g_j aprėžta $\forall t \in R$. Pastebėkime, kad

$$\langle g \rangle_j \equiv M_j[g] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g_j(\tau, s, y_j) ds.$$

Pažymėsime

$$\bar{g}_j(\varepsilon) = \max_{(t, y_j) \in \left[0, \frac{\tau_0}{\varepsilon}\right] \times [0, 2\pi]} \left| \int_0^t (g_j(\varepsilon t, s, y_j) - \langle g \rangle_j(\varepsilon t, y_j)) ds \right|.$$

2.9 lema. Tarkime, kad funkcija $g(\tau, y_1, y_2, \dots, y_n)$ yra 2π – periodinė pagal kiekvieną kintamąjį y_j ir yra tolydžiai diferencijuojama pagal šiuos kintamuosius:

$$(\forall (\tau, y) \in [0, \tau_0] \times R^n) \left| \frac{\partial^{|\alpha|} g(\tau, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \dots \partial y_n^{\alpha_n}} \right| \leq G, \quad |\alpha| \leq p, \quad (2.24)$$

čia $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $\alpha_j \geq 0$.

Tada

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \bar{g}_j(\varepsilon) = 0. \quad (2.25)$$

Įrodymas pateiktas (Krylovas 2008) straipsnyje. Taip pat žr.: (Krylovas 1985; Krylov 1986).

2.2.3. Teiginių įrodymai

2.6 lemos įrodymas

Iš 2.5 lemos išplaukia formulė:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} M_j [g(\tau, y_1, \dots, y_n)] = M_j \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial g(\tau, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_k} \right]. \quad (2.26)$$

Jei funkcija $g(\tau, t, x)$ turi tolydžiąją dalinę išvestinę pagal τ , tai galioja lygybė:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} M_j [g(\tau, t, x)] = M_j \left[\frac{\partial g(\tau, t, x)}{\partial \tau} \right].$$

Tarkime, kad $\bar{g}_l(y_l)$ ir $v_k(y_k)$ yra tolydžiai diferencijuojamos 2π -periodinės funkcijos (rašome $\bar{g}_l, v_k \in C_{2\pi}^1(R)$). Pažymėsime:

$$G = \bar{g}_l(y_j + (\lambda_j - \lambda_l)s) \frac{dv_k(y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s)}{dy_k},$$

$$\Delta G = G(y_j + \Delta y_j) - G(y_j),$$

$$M_j^T [\Delta G] = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\bar{g}_l(y_j + \Delta y_j + (\lambda_j - \lambda_l)s) \frac{dv_k(y_j + \Delta y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s)}{dy_k} - \right.$$

$$\left. \bar{g}_l(y_j + (\lambda_j - \lambda_l)s) \frac{dv_k(y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s)}{dy_k} \right) ds.$$

Pertvarkysime šį reiškinį taip:

$$M_j^T [\Delta G] = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\bar{g}_l(y_j + \Delta y_j + (\lambda_j - \lambda_l)s) \frac{dv_k(y_j + \Delta y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s)}{dy_k} - \right.$$

$$\left. \bar{g}_l(y_j + (\lambda_j - \lambda_l)s) \frac{dv_k(y_j + \Delta y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s)}{dy_k} + \bar{g}_l(y_j + (\lambda_j - \lambda_l)s) \times \right.$$

$$\left. \frac{dv_k(y_j + \Delta y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s)}{dy_k} - \bar{g}_l(y_j + (\lambda_j - \lambda_l)s) \frac{dv_k(y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s)}{dy_k} \right) ds =$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{dv_k(y_j + \Delta y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s)}{dy_k} (\bar{g}_l(y_j + \Delta y_j + (\lambda_j - \lambda_l)s) - \bar{g}_l(y_j + (\lambda_j - \lambda_l)s) + \bar{g}_k(y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s) \right. \\ \left. \frac{dv_k(y_j + \Delta y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s - dv_k(y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s)}{dy_k} \right) ds =$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(\Delta \bar{g}_l \frac{dv_k(y_j + \Delta y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s)}{dy_k} + \bar{g}_l(y_j + (\lambda_j - \lambda_l)s) \Delta \frac{dv_k}{dy_k} \right) ds.$$

Pasinaudosime tuo, kad egzistuoja $\theta(y, s)$ ($0 \leq \theta \leq 1$) (Fichtengolcas, 1967):

$$\Delta \bar{g}_l = \frac{\partial \bar{g}_l(y_j + \theta \Delta y_j + (\lambda_j - \lambda_l)s)}{\partial y_j} \Delta y_j$$

ir integruosime reiškinių dalimis:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta y_j} M_j^T [\Delta G] &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \bar{g}_l}{\partial y_l} \frac{dv_k}{dy_k} ds + \frac{1}{T} \int_0^T \bar{g}_l \frac{\Delta dv_k}{dy_k} ds = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \bar{g}_l}{\partial y_l} \frac{dv_k}{dy_k} ds + \frac{1}{T} \int_0^T \bar{g}_l \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} ds \left(\frac{\Delta v_k}{\Delta y_j} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \bar{g}_l}{\partial y_l} \frac{dv_k}{y_k} ds + \frac{1}{T(\lambda_j - \lambda_k)} \bar{g}_l \frac{\Delta v_k}{\Delta y_j} \Big|_0^T - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\Delta v_k}{\Delta y_j} ds \left(\frac{\bar{g}_l}{\lambda_j - \lambda_k} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \bar{g}_l}{\partial y_l} \frac{dv_k}{dy_k} ds + \frac{1}{T(\lambda_j - \lambda_k)} \bar{g}_l \frac{\Delta v_k}{\Delta y_j} \Big|_0^T - \frac{\lambda_j - \lambda_l}{T(\lambda_j - \lambda_k)} \int_0^T \frac{\partial \bar{g}_l}{\partial y_l} \frac{dv_k}{dy_k} ds. \end{aligned}$$

Kadangi visos funkcijos tolydžios ir periodinės, egzistuoja ir lygios ribos

$$\lim_{\Delta y_j \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta y_j} M_j^T [\Delta G] = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\Delta y_j \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y_j} M_j^T [\Delta G].$$

Pasinaudoję lygybe

$$1 - \frac{\lambda_j - \lambda_l}{\lambda_j - \lambda_k} = \frac{\lambda_l - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k},$$

gausime, kad funkcija $M_j \left[\bar{g}_l \frac{\partial v_k}{\partial y_k} \right]$ yra diferencijuojama ir galioja formulė

$$\frac{\partial}{\partial y_j} M_j \left[\bar{g}_l \frac{\partial v_k}{\partial y_k} \right] = \frac{\lambda_l - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} M_j \left[\frac{\partial \bar{g}_l}{\partial y_l} \frac{\partial v_k}{\partial y_k} \right]. \quad (2.27)$$

Pakeitę (2.27) formulėje \bar{g}_l į funkciją $f(v)$, gausime

$$\frac{\partial}{\partial y_j} M_j \left[f(v) \frac{\partial v_k}{\partial y_k} \right] = \sum_{l=1}^n \frac{\lambda_l - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} M_j \left[\frac{\partial f(v)}{\partial v_l} \frac{\partial v_l}{\partial y_l} \frac{\partial v_k}{\partial y_k} \right]. \quad (2.28)$$

Iš vidurkinimo pagal charakteristikas operatoriaus apibrėžimo (2.10) išplaukia, kad

$$M_j [g(\tau, y_j)] \equiv g(\tau, y_j). \quad (2.29)$$

Taigi suvidurkintą lygčių sistemą (2.11) galima perrašyti taip:

$$\frac{\partial v_j}{\partial \tau} - \langle f_{jj}(u) \rangle_j \frac{\partial v_j}{\partial y_j} = M_j \left[f_{j0}(v) + \sum_{i \neq j} f_{ji}(v) \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \right]. \quad (2.30)$$

Pažymėsime g_j reiškinių (3.48) sistemos dešinėje pusėje:

$$g_j = f_{j0}(v) + \sum_{i \neq j} f_{ji}(v) \frac{\partial v_i}{\partial y_i}.$$

Gausime (2.18) formulę.

□

2.7 lemos įrodymas

Tegul $(\forall \tau \in [0, \tau'_0]) \left| \overset{m}{w}_j(\tau, y_j) \right| \leq W$. Tada iš (2.22) gausime

$$\left| \overset{m+1}{v}_j(\tau, y_j) \right| \leq U_j^0 + \tau(F_{j0}^0 + \sum_{i=1}^n F_{ji}^0 W).$$

Taigi galime pasirinkti $\tau'_0(W) = \min_j \frac{D_j^0 - U_j^0}{F_{j0}^0 + \sum_{i=1}^n F_{ji}^0 W}$.

Kadangi $D_j^0 > U_j^0$, $(\forall W > 0) \tau'_0(W) > 0$.

Iš (2.23) taikydami 2.3 lemos (2.17) formulę gausime

$$\overset{m+1}{w}_j(\tau, y_j) = U_{1j} \overset{m}{Y}_j(0; \tau, y_j) + \int_0^\tau \left\langle g_{1j}(\overset{m}{v}_j, \overset{m}{w}_j) \right\rangle_j \left(s, \overset{m}{Y}_j(s; \tau, y_j) \right) ds. \quad (2.31)$$

Čia $\overset{m+1}{Y}_j$ yra (2.15) lygtimis apibrėžtos charakteristikos, kai

$$\lambda(s, \overset{m}{Y}) = - \left\langle f_{jj}(\overset{m}{v}(s, \overset{m}{Y})) \right\rangle_j.$$

Iš (2.31) ir funkcijų g_{1j} apibrėžimo (28 psl.) gausime įvertį

$$\left| \overset{m+1}{w}_j(\tau, y_j) \right| \leq U_j^1 + \tau(F_{j0}^1 W + (n-1)^2 \lambda^0 \sum_{i=1}^n F_{ji}^1 W^2).$$

Taigi, $\forall \tau \in [0, \tau''_0]$, galime pasirinkti

$$\tau''_0(W) = \min_j \frac{W - U_j^1}{nF_{j0}^1 W + (n-1)^2 \lambda^0 \sum_{i=1}^n F_{ji}^1 W^2},$$

$$\text{čia } \lambda^0 = \max_{l \neq k, j \neq k} \left| \frac{\lambda_l - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right|.$$

Matome, kad $(\forall W > U_j^1) \tau''_0(W) > 0$.

Iš čia išplaukia, kad galime pasirinkti τ^0 kaip uždavinio

$$\tau^0 = \max_{W > U_j^1} \min \{ \tau'_0(W), \tau''_0(W) \}$$

sprendinį.

□

2.8 lemos įrodymas

Užrašius (2.23) charakteristikų lygtis:

$${}^m Y_j(s; \tau, y_j) = y_j + \int_{\tau}^s \langle f_{jj}(v) \rangle_j \left(r; {}^m Y_j(r; \tau, y_j) \right) dr$$

Gausime

$$\begin{aligned} & \left| {}^m Y_j(s; \tau, y'_j) - {}^m Y_j(s; \tau, y''_j) \right| \leq |y'_j - y''_j| + \\ & + n \max_i F_{ji}^1 \int_{\tau}^s \left| {}^m Y_j(r; \tau, y'_j) - {}^m Y_j(r; \tau, y''_j) \right| dr. \end{aligned}$$

Taikydami (2.14) formulę (2.1 lemą), gausime

$$\left| {}^m Y_j(s; \tau, y'_j) - {}^m Y_j(s; \tau, y''_j) \right| \leq C_g^0 |y'_j - y''_j|,$$

$$C_g^0 = e^{n\tau^0 \max_i F_{ji}^1}.$$

Taikant šią nelygybę iš (2.31) gausime įvertį

$$\left| {}^{m+1} w_j(\tau, y'_j) - {}^{m+1} w_j(\tau, y''_j) \right| \leq C_j |y'_j - y''_j|,$$

čia konstantos C_j priklauso nuo funkcijų g_{1j} išvestinių įverčių, kurie išplaukia iš (2.7) apribojimų.

Analogiškai įrodomos kitos 2.8 lemos nelygybės.

□

2.2.4. Teoremos antrojo teiginio įrodymas

Turime (2.11) su pradinėmis sąlygomis (2.12). Reikia įrodyti, kad (2.11), (2.12) uždavinys turi vienintelį sprendinį.

Sprendinio egzistavimą įrodinėsime nuoseklių iteracijų metodu. Konstruosime iteracijas:

$$\begin{aligned} & v_j^0 \equiv u_{0j}(y_j), \\ & \frac{\partial v_j^1}{\partial \tau} = M_j \left[f_{j0}(v^0) + \sum_{i=1}^n f_{ji}(v^0) \frac{\partial v_i^0}{\partial y_i} \right], \\ & \dots \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^m v_j}{\partial \tau} = M_j \left[f_{j0}({}^m v) + \sum_{i=1}^n f_{ji}({}^m v) \frac{\partial^m v_i}{\partial y_i} \right].$$

Apibrėšime $v({}^{m+1})$ kaip uždavinio

$$\frac{\partial^m v_j}{\partial \tau} = M_j \left[f_{j0}({}^m v) + \sum_{i=1}^n f_{ji}({}^m v) \frac{\partial^m v_i}{\partial y_i} \right]$$

sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą

$$v({}^{m+1})(0, y_j) = u_{0j}(y_j)$$

ir pareikalausime, kad ${}^{m+1}v \in D$.

Įrodysime, kad visos iteracijos ${}^m v$ yra apibrėžtos srityje $[0, \tau^0]$ ir neišeina iš srities D , t. y. reikia įrodyti, kad egzistuoja sritis, kurioje visi nuoseklieji artiniai ir jų pirmosios išvestinės yra tolygiai aprėžtos srityje.

Šiam tikslui pažymėsime $\frac{\partial v_j(\tau, y_j)}{\partial y_j} = w_j(\tau, y_j)$ ir sukonstruosime prailgintą sistemą. Ją sukonstruoti leidžia 2.6 lema. Jos dėka, parodėme, kad galime dešinę pusę diferencijuoti pagal greitą kintamąjį ir neatsiranda antrosios eilės išvestinių, t. y. dešinė pusė nepraranda savo glodumo:

$$\frac{\partial^m w_j}{\partial \tau} - \left\langle f_{jj}({}^m v) \right\rangle_j \frac{\partial^m w_j}{\partial y_j} = M_j \left[\sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial f_{j0}(v)}{\partial v_l} w_l + \sum_{i \neq j} \sum_{k \neq j} \frac{\lambda_l - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \frac{\partial f_{ji}(v)}{\partial v_l} w_l w_k \right) \right],$$

$$w_j({}^{m+1})(0, y_j) = u_{1j}(y_j) \equiv \frac{du_{0j}(y_j)}{dy_j}.$$

Remdamiesi 2.7 lema įrodėme, kad visi (2.22), (2.23) nuoseklieji artiniai yra aprėžti kartu su jų išvestinėmis pagal y (analogiškai pagal τ). Vadinasi, visos suvidurkintos sistemos iteracijos ${}^m v$ yra aprėžtos.

Pagal 2.8 lemą įrodome, kad (2.22), (2.23) nuoseklieji artiniai sudaro tolygiai tolydžių funkcijų ${}^m v_j(\tau, y_j)$, ${}^m w_j(\tau, y_j)$ seka.

Tada pritaikius žinomą Arcelos teoremą (Hartman 1964) gausime, kad

egzistuoja jos konverguojantis posekis. Šio posekio riba

$$\lim_{m \rightarrow \infty} v_j^m = v_j$$

pagal 2.4 lemą yra tolydi ir tolydžiai diferencijuojama funkcija, kuri ir bus (2.19)–(2.21) sistemos sprendinys.

Parodysime, kad šis sprendinys yra vienintelis. Tarkime, kad

$$v_j^{(1)}, w_j^{(1)}, v_j^{(2)}, w_j^{(2)} \in C_{2\pi}^1([0, \tau^0] \times \mathbb{R})$$

yra du šio uždavinio sprendiniai.

Pažymėsime

$$r_j = \begin{cases} v_j^{(1)} - v_j^{(2)}, & \text{kai } j = 1, 2, \dots, n, \\ w_{j-n}^{(1)} - w_{j-n}^{(2)}, & \text{kai } j = n+1, n+2, \dots, 2n. \end{cases}$$

Tada $r_j(0, y_j) = 0$ ir funkcijos $r_j(\tau, y_i)$ tenkina tiesinių lygčių sistemą

$$\frac{\partial r_j}{\partial \tau} = M_j \left[\sum_{i=1}^n h_{0ji}(\tau, y) r_i \right], \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial r_j}{\partial \tau} + \alpha_j(\tau, y_j) \frac{\partial r_j}{\partial y_j} = M_j \left[\sum_{i=1}^n h_{1ji}(\tau, y) r_i \right], \quad j = n+1, n+2, \dots, 2n. \quad (2.33)$$

Funkcijos h_{0ji} ir h_{1ji} išreiškiamos iš g_{0j} ir g_{1j} dalinių išvestinių ir funkcijų $v_j^{(1)}, w_j^{(1)}, v_j^{(2)}, w_j^{(2)}, \alpha_j = \langle f_{jj}(v^{(1)}) \rangle$.

Integruojant (2.32), (2.33) pagal charakteristikas ir taikant (2.14) nelygybę gausime, kad $r_j \equiv 0$, t. y. (2.19)–(2.21) uždavinio sprendinio vienatis.

2.2.5. Teoremos trečiojo teiginio įrodymas

Pažymėsime $r_j(t, x; \varepsilon) = u_j(t, x; \varepsilon) - v_j(\varepsilon t, x - \lambda_j t)$. Tada iš (2.6) ir (2.12) gausime, kad funkcijos r_j tenkina nulines pradines sąlygas $r_j(0, x; \varepsilon) = 0$, o įrašę r_j į (2.5) gausime sistemą

$$\frac{\partial r_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial r_j}{\partial x} = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^n \left(a_{ji} r_i + b_{ji} \frac{\partial r_i}{\partial x} \right) + c_j \right). \quad (2.34)$$

Funkcijos $a_{ij}(t, x; \varepsilon)$, $b_{ji}(t, x; \varepsilon)$ priklauso nuo funkcijų f_{ji} dalinių išvestinių ir nuo jau rastų funkcijų u_j , v_j , $\frac{\partial u_j}{\partial x}$, $\frac{\partial v_j}{\partial x}$, funkcijos c_j išreiškiamos taip:

$$g_{0j}(\tau, y_1, \dots, y_n) = g_{0j}(v) - \langle g_{0j}(v) \rangle_j,$$

$$g_{0j}(v) = f_{j0}(v) + \sum_{i=1}^n f_{ji}(v) \frac{\partial v_i}{\partial y_i},$$

$$c_j(t, x; \varepsilon) = g_j(\varepsilon t, x - \lambda_1 t, x - \lambda_2 t, \dots, x - \lambda_n t).$$

(2.34) sistema yra hiperbolinė, kai $\varepsilon < \varepsilon^0$ (žr. (2.9) formulę). Todėl ją galima perrašyti Rymano invariantais (Rozhdestvenskii, Yanenko 1978)

$$\bar{r}_j = r_j + \varepsilon \sum_{i=1}^n \alpha_{ji}(t, x; \varepsilon) r_i :$$

$$\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial x} = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^n \bar{a}_{ji} \bar{r}_i + \bar{c}_j \right), \quad (2.35)$$

o $\bar{c}_j = c_j + O(\varepsilon)$.

Integruojame (2.35) pagal charakteristikas $x - \lambda_j t - const$ (tą patį rezultatą gausime integruojant (2.34) pagal charakteristikas $x - \lambda_j t + \varepsilon \beta_j(t; x; \varepsilon) - const$, čia funkcijos β_j yra aprėžtos) ir gausime

$$|\bar{r}_j| \leq \varepsilon \left(\left| \int_0^t \bar{c}_j ds \right| + \int_0^t \sum_{i=1}^n \bar{a}^0 |\bar{r}_i| ds \right).$$

Pastebėję, kad $\left| \int_0^\varepsilon \bar{c}_j ds \right| \leq \bar{g}_j(\varepsilon)$ iš 3.9 lemos ir (2.14) nelygybės gausime, kad tolygiai pagal $(t, X) \in [0, \frac{\tau^0}{\varepsilon}] \times [0, 2\pi]$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\bar{r}_j(t, x; \varepsilon)| = 0.$$

Tai ir įrodo teoremos 3 teiginį.

2.3. Antrojo skyriaus išvados

1. Įrodyta teorema leidžia pagrįsti asimptotinį metodą labai įvairiems bangų sąveikos modeliams.
2. Asimptotikos paklaida $\max_{(t,x) \in [0, \frac{c}{\varepsilon}] \times R} = \mu(\varepsilon)$ priklauso nuo skaičių $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ir bendruoju atveju yra tik $o(1)$, kai $\varepsilon \rightarrow 0$.
3. Funkcijų glodumui reikia, kad būtų $p > n - 2$ ($u_{0j} \in C_{2\pi}^p(R)$, $f_{ji} \in C^p(D)$) $\mu(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, o atitinkamą konstantą C įvartyje $\mu(\varepsilon) \leq C\varepsilon$, galima įvertinti, naudojant konstantas U_j^k, F_{ji}^k .
4. Praktinių uždavinių sprendimui nagrinėjame $\lambda_j = \lambda_j^0 + \varepsilon\lambda_j^1(\varepsilon)$, tai leidžia sumažinti paklaidą $\mu(\varepsilon)$ esant fiksuotoms ε reikšmėms.

3

Rezonansinės bangų sąveikos matematinų modelių pavyzdžiai

Šiame skyriuje nagrinėjami vidurkinimo pagal charakteristikas metodo taikymo pavyzdžiai. Matematinų modelių tyrimui taikoma bendra schema. Pirma apibrėžiamas turintis fizinę prasmę mažasis parametras ir ieškoma mažos amplitudės bangų. Sistemose paliekami mažojo parametro eilės nariai ir jos pertvarkomos į (2.1) pavidalą naudojant jų hiperboliškumą ir Rymano invariantų metodą. Po to naudojant antrajame skyriuje išdėstyta techniką konstruojama tolygiai tinkama ilgajame laiko intervale asimptotika ir atliekama jos analizė. Šio skyriaus medžiaga paskelbta autorės publikacijose (Lavcel-Budko 2009, 2010, 2013).

3.1. Absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesinių svyravimų asimptotika

3.1.1. Matematinis modelis

Įtemptos absoliučiai tamprios nesvarios stygos skersinių svyravimų diferencialinė lygtis $u_{tt} = c_0^2 u_{xx}$ pateikiama beveik visuose matematinės fizikos ar diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis vadovėliuose (pvz. Košliakov (1970)). Čia $u(x, t)$ yra stygos nuokrypis taške x laiko momentu t , $c_0 = \sqrt{T/\rho}$

– garso greitis stygos medžiagoje, priklausantis nuo jos įtempimo T ir tankio ρ . Tačiau ši tiesinė diferencialinė lygtis tampa banginių laisvųjų svyravimų matematiniu modeliu tik esant labai supaprastintam tiriamajam judėjimui. Galima parodyti (Miškinis 2003), kad jei atsisakyti mažo gradiento sąlygos, t. y., jei pareikalauti, kad būtų $|\theta_x| \ll 1$, tai stygos elemento judėjimo lygtis bus tokia (čia $\theta(x,t)$ yra stygos elemento nuokrypio kampas nuo pusiausvyros padėties)

$$u_{tt} = \frac{c_0^2 u_{xx}}{\sqrt{(1 + u_x^2)^3}}. \quad (3.1)$$

Tuo atveju, kai nukrypimai nuo pusiausvyros padėties yra nykstamai maži, t. y. $|\theta_x| \ll 1$ stygos judėjimo (3.1) lygtis tampa gerai žinoma tiesine bangine lygtimi.

Straipsnyje (Krylovas, Miškinis 2007) buvo pateiktas absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesinių svyravimų matematinis modelis. (3.1) lygtis buvo nagrinėjama, padarius dvi svarbias prielaidas:

1) atsižvelgus į galimus stygos medžiagos arba įtempimo nehomogeniškus, laikoma, kad garso greitis c yra silpnai periodinė erdvinė funkcija

$$c = c_0 (1 + \varepsilon_1 \cos \omega x), \quad \varepsilon_1 \ll 1;$$

2) įvestas dar vienas mažasis bedimensinis parametras ε_2 ir pasinaudota skleidiniu:

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + (\varepsilon_2 u_x)^2)^3}} = 1 - \frac{3}{2} \varepsilon_2^2 u_x^2 + \frac{15}{8} \varepsilon_2^4 u_x^4 + O(\varepsilon_2^6), \quad \varepsilon_2 \ll 1.$$

Mažojo parametro ε_2 įvedimas leidžia atsisakyti reikalavimo $\left| \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right| \ll 1$ ir nagrinėti nemažus stygos nuokrypius nuo pusiausvyros padėties $u_x = O(1)$.

Atsižvelgiant į padarytas prielaidas ir įvedant redukuotą laiką $\tilde{t} = t/c_0$, (3.1) lygtis pereina į tokią lygtį (\tilde{t} vėl žymėta t)

$$u_{tt} - (1 + \varepsilon_1 \cos \omega x)^2 u_{xx} \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon_2^2 u_x^2 + \frac{15}{8} \varepsilon_2^4 u_x^4 \right) = 0. \quad (3.2)$$

Nagrinėsime (3.2) lygtį, esant prielaidai, kad mažieji parametrai ε_1 ir ε_2 turi šį sąryšį:

$$\frac{3}{16\beta} \cdot \varepsilon_2^2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon. \quad (3.3)$$

Tada iš (3.2) ir (3.3) gauname lygtį

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon (\alpha \cos(\omega x) u_{xx} - \beta u_x^2) + O(\varepsilon^2). \quad (3.4)$$

Pažymėję $r^+ = u_t + u_x$ ir $r^- = u_t - u_x$, perrašome (3.4) lygtį ekvivalenčiaja sistema Rymano invariantais (analogiškai, kaip dujų dinamikos lygčių sistemoje, 56 psl.)

$$\frac{\partial r^\pm}{\partial t} \mp \frac{\partial r^\pm}{\partial x} = \pm \varepsilon \left(\frac{\partial r^+}{\partial x} + \frac{\partial r^-}{\partial x} \right) \cdot \left(\alpha \cos \omega x - \beta (r^+ - r^-)^2 \right). \quad (3.5)$$

Pastebėsime, kad mūsų metodika taikytina ir kai (3.3) prielaida negalioja, t. y. kai $\varepsilon_2^2 \ll \varepsilon_1$ arba $\varepsilon_2^2 \gg \varepsilon_1$; tai tik palengvina (3.2) uždavinio asimptotinę analizę, nes šiuo atveju (3.4) lygtyje lieka mažiau eilės $O(\varepsilon)$ narių.

Nesutrikdytoji (t. y. kai $\varepsilon = 0$) (3.5) sistema aprašo bėgančiąsias į skirtingas puses dvi nepriklausomas bangas $r_0^-(x+t)$ ir $r_0^+(x-t)$. Čia $r^\pm(x)$ yra tolydžiai diferencijuojamos funkcijos, apibrėžiančios pradines (3.5) uždavinio sąlygas. Bandydami konstruoti tiesioginį asimptotinį artinį

$$r^\pm(x,t) = r_0(x \pm t) + \varepsilon r_1^\pm(x,t) + \dots, \quad (3.6)$$

susidursime su būdinga asimptotinei analizei sekuliariųjų narių εt problema. Dėl jų (3.6) asimptotika bus tinkama tik kai $\varepsilon t \ll 1$, t. y. trumpame laiko intervale $t \ll \varepsilon^{-1}$.

3.1.2. Vidurkinimo metodas

Kaip ir anksčiau $\tau = \varepsilon t$ – lėtasis laikas, greitieji charakteristiniai kintamieji šiuo atveju: $y^\pm = x \pm t$.

Asimptotinio (3.5) uždavinio sprendinio artinio ieškome pavidalu (žr. 2 disertacijos skyrių, 20 psl.)

$$r^\pm(x,t;\varepsilon) \approx R^\pm(\tau, y^\pm).$$

Funkcijos R^\pm ieškomos sprendžiant suvidurkintąją sistemą

$$\frac{\partial R^\pm}{\partial \tau} = \pm \left\langle \left(\frac{\partial R^+}{\partial y^+} + \frac{\partial R^-}{\partial y^-} \right) \cdot \left(\alpha \cos \omega x - \beta (R^+ R^-)^2 \right) \right\rangle_\pm. \quad (3.7)$$

Vidurkinimo pagal charakteristikas operatoriai $\langle \dots \rangle_{\pm}$ apibrėžiami taip:

$$\langle g(\tau, x, y^+, y^-) \rangle_+ \equiv \lim_{S \rightarrow +\infty} S^{-1} \int_0^S g(\tau, y^+ - s, y^+, y^+ - 2s) ds, \quad (3.8)$$

$$\langle g(\tau, x, y^+, y^-) \rangle_- \equiv \lim_{S \rightarrow +\infty} S^{-1} \int_0^S g(\tau, y^- + s, y^-, y^- + 2s) ds. \quad (3.9)$$

Iš (3.8), (3.9) apibrėžimų išplaukia (žr. disertacijos 2 skyrių: 2.4 ir 2.5 lemas, 26 psl.) vidurkinimo operatorių savybės

$$\left\langle \frac{\partial R^{\pm}}{\partial y^{\pm}} \right\rangle_{\mp} = 0, \quad \left\langle \frac{\partial R^{\pm}}{\partial y^{\pm}} R^{\pm} \right\rangle_{\mp} = 0, \quad \left\langle \frac{\partial R^{\pm}}{\partial y^{\pm}} (R^{\pm})^2 \right\rangle_{\mp} = 0, \quad (3.10)$$

$$\left\langle \frac{\partial R^{\mp}}{\partial y^{\mp}} \cos \omega x \right\rangle_{\mp} = 0, \quad \left\langle \frac{\partial R^{\mp}}{\partial y^{\mp}} (R^{\pm})^2 \right\rangle_{\mp} = \frac{\partial R^{\mp}}{\partial y^{\mp}} \left\langle (R^{\pm})^2 \right\rangle_{\mp}, \quad (3.11)$$

galiojančios tolydžiai diferencijuojamoms apibrėžtomis srityje

$$(\tau, y) \in [0, \tau_0] \times (-\infty, +\infty)$$

funkcijoms $R^{\pm}(\tau, y)$ (τ_0 – teigiama konstanta). Taikome (3.10), (3.11) formules (3.7) sistemai:

$$\frac{\partial R^{\pm}}{\partial \tau} \pm \beta (R^{\pm})^2 \frac{\partial R^{\pm}}{\partial y^{\pm}} = \pm \alpha \left\langle \frac{\partial R^{\mp}}{\partial y^{\mp}} \cos \omega x \right\rangle_{\pm} \pm \beta \frac{\partial R^{\pm}}{\partial y^{\mp}} \left\langle (R^{\mp})^2 \right\rangle_{\pm}. \quad (3.12)$$

3.1.3. Suvidurkintoji sistema

Tarkime, kad (3.5) sistema papildyta pradinėmis sąlygomis

$$r^+(x, 0) = r_0^+(x), \quad r^-(x, 0) = r_0^-(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (3.13)$$

Asimptotinis sprendinys randamas sprendžiant (3.12), (3.17) suvidurkintąją sistemą. Atskirais atvejais, pavyzdžiui, kai funkcijos r^+ ir r^- nyksta begalybėje:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} r^{\pm}(x) = 0. \quad (3.14)$$

(3.12) sistema išskaidoma į dvi nepriklausomas paprastųjų netiesinių bangų lygtis:

$$\frac{\partial R^\pm}{\partial \tau} \pm \beta (R^\pm)^2 \frac{\partial R^\pm}{\partial y^\pm} = 0. \quad (3.15)$$

Pastebėsime, kad gautą (3.15) lygtį keitiniu $w(x,t) = \beta (R^\pm(x,t))^2$ galima pertvarkyti į klasikinę Hopfo lygtį (dar vadinamą Rymano arba Oilerio lygtimi) $w_t + ww_x = 0$ (Miškinis 2003).

Sudėtingesnis yra periodinis uždavinys. Jei (3.13) funkcijos yra periodinės su periodu 2π ir ω yra sveikasis skaičius, (3.8) ir (3.9) vidurkinimo operatorius galima pakeisti integralais baigtiniame intervale ir suvidurkintoji (3.12) sistema užrašoma taip:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^+}{\partial \tau} + \beta \cdot (R^+)^2 \frac{\partial R^+}{\partial y^+} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial R^-(\tau, y^+ - 2s)}{\partial y^-} \times \\ \cos(\omega(y^+ - s)) ds - \frac{\partial R^+}{\partial y^+} \cdot \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R^-)^2(\tau, y^+ - 2s) ds, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^-}{\partial \tau} - \beta \cdot (R^-)^2 \frac{\partial R^-}{\partial y^-} &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial R^+(\tau, y^- + 2s)}{\partial y^+} \times \\ \cos(\omega(y^- + s)) ds + \frac{\partial R^-}{\partial y^-} \cdot \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R^+)^2(\tau, y^- + 2s) ds. \end{aligned}$$

(3.16) sistema papildome periodinėmis pradinėmis sąlygomis:

$$R^\pm(\tau, y^\pm)|_{\tau=0} = R_0^\pm(y^\pm) \equiv R_0^\pm(y^\pm + 2\pi). \quad (3.17)$$

Kai funkcijos R_0^\pm yra tolydžiai diferencijuojamos, egzistuoja tokia teigiama konstanta τ_0 , kad (3.16), (3.17) uždavinys turi vienintelį tolydžiai diferencijuojamą (tiek kartu, kiek R_0^\pm) periodinį pagal y^\pm sprendinį $R^\pm(\tau, y^\pm)$ srityje $[0, \tau_0] \times (-\infty, +\infty)$ (žr. disertacijos 2 skyrių, 24 psl.).

3.1.4. Asimptotinis sprendinys

Šio paragrafo tikslas – sukonstruoti (3.16), (3.17) uždavinio sprendiniui tokio pavidalo artinį:

$$R_{N,M}^\pm(\tau, y^\pm) = a_0^\pm(\tau) + \sum_{k=1}^N a_k^\pm(\tau) \cos(ky^\pm) + b_k^\pm(\tau) \sin(ky^\pm), \quad (3.18)$$

kai $a_k^\pm(\tau)$, $b_k^\pm(\tau)$ yra M -tojo laipsnio polinamai.

Įrašome (3.18) į nagrinėjamą (3.16) sistemą ir gauname naują diferencialinių lygčių sistemą. Parodome Maple programos fragmentą, kai grupuojami nariai prie vienodų harmonikų $\cos(ky^\pm)$, $\sin(ky^\pm)$ (išsamiau žr. A priedą):

```
for k to n do  $a_k^\pm(\tau) := \text{coeff}(R^\pm(\tau, y^\pm), \cos(k \cdot y^\pm))$  end do;
for k to n do  $b_k^\pm(\tau) := \text{coeff}(R^\pm(\tau, y^\pm), \sin(k \cdot y^\pm))$  end do.
```

Funkcijų $a_k^\pm(\tau)$, $b_k^\pm(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_0]$ ieškosime M -tojo laipsnio polinomų su neapibrėžtais koeficientais pavidalu:

$$a_k^\pm(\tau) = \sum_{i=0}^M a_{ki}^\pm \tau^i, \quad b_k^\pm(\tau) = \sum_{i=1}^M b_{ki}^\pm \tau^i. \quad (3.19)$$

Įrašę (3.18), (3.19) reiškinius į gautą lygčių sistemą, grupuojame narius prie vienodu τ laipsnių ir užrašome sąryšius polinomų koeficientams a_k^\pm, b_k^\pm rasti. Narių grupavimo Maple programos fragmentas atrodo taip:

```
for i to M do
for k to N do  $a_{0i}^\pm := \text{subs}(\tau = 0, a_k^\pm)$  end do;
for k to N do  $b_{0i}^\pm := \text{subs}(\tau = 0, b_k^\pm)$  end do;
for k to N do  $b_{ki}^\pm := \text{coeff}(\text{collect}((1/k) \cdot b_k^\pm, [\tau^i]), \tau^i)$  end do;
for k to N do  $a_{ki}^\pm := \text{coeff}(\text{collect}((1/k) \cdot a_k^\pm, [\tau^i]), \tau^i)$  end do;
end do;
```

3.1.5. Nerezonansinis atvejis

Išnagrinėsime nerezonansinį atvejį, t. y. kai (3.16) sistemoje ω nėra lyginis skaičius. Pastebėsime, kad tą patį rezultatą gausime, kai $\alpha = 0$.

$$\frac{\partial R^\pm}{\partial \tau} \pm \beta \cdot (R^\pm)^2 \frac{\partial R^\pm}{\partial y^\pm} = \mp \frac{\partial R^\pm}{\partial y^\pm} \cdot \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R^\mp)^2(\tau, y^\pm \mp s) ds. \quad (3.20)$$

Spręsimė (3.20) lygtį esant periodinėms pradinėms sąlygoms

$$R^\pm(\tau, y^\pm)|_{\tau=0} = \cos(y^\pm). \quad (3.21)$$

Pastebėsime, kad (3.18) funkcijai $R^\pm(\tau, y)$ galioja lygybė

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R^\mp)^2(\tau, y) dy = a_0^2(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2(\tau) + b_k^2(\tau)),$$

t. y. (3.20) sistemos integralai nepriklauso nuo y^\pm . Padauginkime kiekvieną iš (3.20) lygčių iš R^+ ir R^- atitinkamai ir integruojame pagal y nuo 0 iki 2π . Gauname

$$\frac{\partial}{\partial y^\pm} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R^\mp)^2 (\tau, y^\pm \mp s) ds \right) = 0.$$

Taigi $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R^\mp)^2 (\tau, y^\pm \mp s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R^\mp)^2 (0, y^\pm \mp s) ds - const$ ir dvi (3.20) lygtys yra nepriklausomos.

Šiuo atveju kiekvieną (3.20), (3.21) uždavinio sprendinį galima užrašyti neišreikštinės funkcijos pavidalu:

$$R^\pm (\tau, y^\pm) = \cos (y^\pm \mp \beta((R^\pm)^2 \pm (R^\mp)^2)\tau). \quad (3.22)$$

Parodysime, kad (3.22) yra uždavinio sprendinys. Funkcijos $R^\pm (\tau, y^\pm)$ išvestinė pagal τ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} R^\pm (\tau, y^\pm) = \pm \frac{\sin (y^\pm \mp \beta((R^\pm)^2 + (R^\mp)^2)\tau) (\beta((R^\pm)^2 \pm (R^\mp)^2))}{1 \mp \sin (y^\pm \mp \beta((R^\pm)^2 + (R^\mp)^2)t) 2\beta\tau R^\pm}. \quad (3.23)$$

Funkcijos $R^\pm (\tau, y^\pm)$ išvestinė pagal y :

$$\frac{\partial}{\partial y} R^\pm (\tau, y^\pm) = - \frac{\sin (y^\pm \mp \beta((R^\pm)^2 + (R^\mp)^2)\tau)}{1 \mp \sin (y^\pm \mp \beta((R^\pm)^2 + (R^\mp)^2)\tau) 2\beta\tau R^\pm}. \quad (3.24)$$

Įrašę (3.23), (3.24) į (3.20) lygtis, gauname tapatybes.

Išskleiskime funkcijas R^\pm Teiloro formule. Pažymėję $D_j R$ funkcijos R j -tosios eilės dalines išvestines pagal τ , gauname:

$$R^\pm (\tau, y^\pm) = \sum_{j=0}^M \frac{D_j R^\pm (0, y^\pm)}{j!} \tau^j + O(\tau^{M+1}).$$

Apskaičiuavę $D_j R^\pm$ eilės išvestines, užrašome artinių formules:

$$R^\pm (\tau, y^\pm) = \left(1 - \frac{5}{16} \tau^2 + \frac{25}{1024} \tau^4 - \frac{251}{245760} \tau^6 \right) \cos (y) + \left(\mp \frac{3}{4} \tau \pm \frac{37}{384} \tau^3 \mp \frac{109}{20480} \tau^5 \pm \frac{321}{1835008} \tau^7 \right) \sin (y) +$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{21}{32} \tau^2 - \frac{459}{512} \tau^4 + \frac{146043}{327680} \tau^6 \right) \cos(3y) + \\ & \left(\pm \frac{1}{4} \tau \mp \frac{117}{128} \tau^3 \pm \frac{2835}{4096} \tau^5 \mp \frac{112671}{458752} \tau^7 \right) \sin(3y) + \\ & \left(-\frac{5}{32} \tau^2 + \frac{875}{512} \tau^4 - \frac{1068281}{294912} \tau^6 \right) \cos(5y) + \\ & \left(\frac{275}{384} \tau^3 \mp \frac{23125}{8192} \tau^5 \pm \frac{3526125}{917504} \tau^7 \right) \sin(5y) + \dots \end{aligned}$$

Atliktas skaitinis tyrimas, kai keičiant harmonikų skaičių N (3.18) formulėje ir polinomo laipsnį M – (3.19) ir lyginant gaunamus rezultatus su (3.23), (3.24) formulių skleidiniais. Buvo iširtas harmonikų skaičiaus ir polinomo laipsnio ir įtaka skleidinio R^\pm koeficientams (N ir M buvo nagrinėjami iki 7) 3.1 lentelė.

3.1 lentelė. Skaitinio eksperimento rezultatai, paklaidos tarp funkcijos R^+ ir skirtingu artinių: $R_{NM}^+ - R^+$

Table 3.1. Results of numerical calculations, in with the function R^+ and as well differences of approximation: $R_{N,M}^+ - R^+$

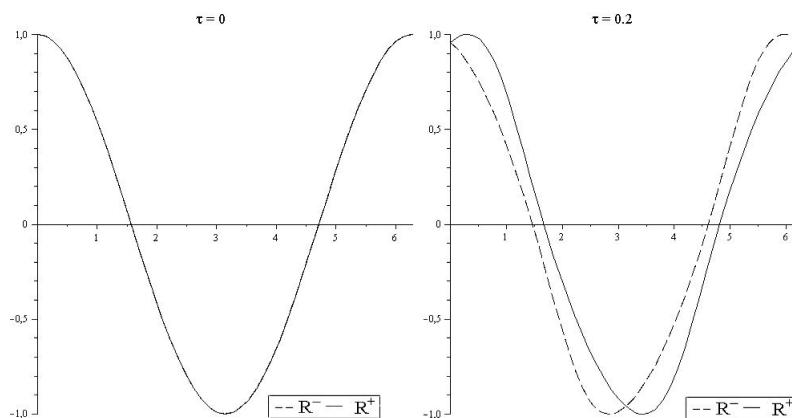
$\tau = 0,1$	$y=0,1$	$y=0,5$	$y=1,0$	$y=2,0$	$y=3,14$	$y=4,0$	$y=4,5$	$y=6,28$
R_{Maple}^+	0,9988	0,9350	0,6117	-0,3582	-0,9889	-0,7280	-0,2662	0,9886
$R_{3,3}^+ - R^+$	0,0015	-0,0006	-0,0002	-0,0012	0,0012	0,0012	-0,0016	0,0012
$R_{5,5}^+ - R^+$	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	-0,0001	0,0001
$R_{7,7}^+ - R^+$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$\tau = 0,3$	$y=0,1$	$y=0,5$	$y=1,0$	$y=2,0$	$y=3,14$	$y=4,0$	$y=4,5$	$y=6,28$
R_{Maple}^+	0,9445	1,0009	0,7882	-0,2566	-0,9153	-0,8911	-0,3986	0,9148
$R_{3,3}^+ - R^+$	0,0034	0,0057	-0,0102	-0,0167	0,0031	0,0101	-0,0175	-0,0032
$R_{5,5}^+ - R^+$	0,0041	-0,0003	-0,0049	-0,0024	-0,0039	0,0037	-0,0059	0,0039
$R_{7,7}^+ - R^+$	0,0038	-0,0011	-0,0026	0,0007	-0,0034	0,0004	-0,0017	0,0034

$\tau = 0,5$	$y=0,1$	$y=0,5$	$y=1,0$	$y=2,0$	$y=3,14$	$y=4,0$	$y=4,5$	$y=6,28$
R_{Maple}^+	0,6369	1,1317	0,9731	-0,1678	-0,6875	-0,9249	-0,5954	0,6894
$R_{3,3}^+ - R^+$	0,1645	-0,1447	-0,0050	-0,0477	-0,0697	-0,0992	-0,0387	-0,0671
$R_{5,5}^+ - R^+$	0,2784	-0,1790	-0,0318	-0,0500	-0,1925	-0,0420	-0,0459	0,1898
$R_{7,7}^+ - R^+$	0,1682	-0,1048	-0,0609	-0,0171	-0,0856	-0,0501	-0,0397	0,0834

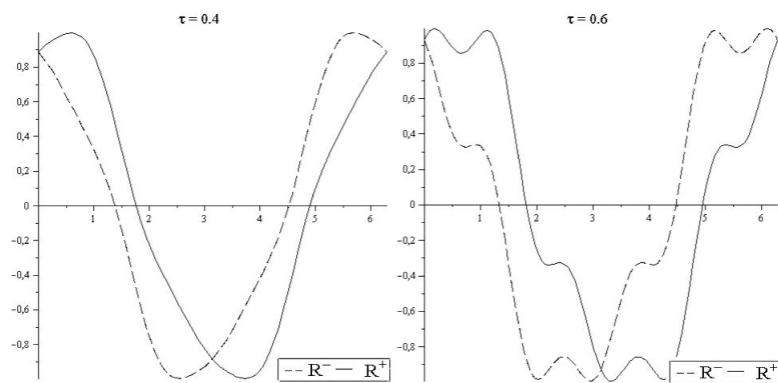
Nustatyta, kad grafiniam tikslumui užtikrinti pakanka imti $N = 7$ ir $M = 7$. Parodysime, kaip atrodo funkcijų R^\pm artinių grafikai nerezonansiniu atveju,

(t. y., kai ω nėra lyginis skaičius) esant skirtingoms lėtojo laiko reikšmėms: 3.1, 3.2 paveikslai.



3.1 pav. R^\pm artiniai, kai $\tau = 0$ ir $\tau = 0,2$

Fig. 3.1. Approximations of R^\pm for $\tau = 0$ and $\tau = 0.2$



3.2 pav. R^\pm artiniai, kai $\tau = 0,4$ ir $\tau = 0,6$

Fig. 3.2. Approximations of R^\pm for $\tau = 0.4$ and $\tau = 0.6$

Iš (3.22) lygybės matome, kad $|R^\pm| \leq 1$, todėl gautos formulės funkcijoms R^\pm skaičiuoti taikytinos tik tokiems $\tau \in [0, \tau_0]$, kai išpildyta ši sąlyga. Nagrinėjamam atvejui $\tau_0 \approx 0,6$.

Atkreiptinas dėmesys į Maple programos simbolinių skaičiavimų galimy-

bes. Tarkime, kad pradinė sąlyga yra tokia:

$$R^\pm(\tau, y^\pm)|_{\tau=0} = h \sin(y^\pm).$$

Tada funkcijas R^\pm galima išreikšti taip:

$$\begin{aligned} R^\pm(\tau, y^\pm) = & \left(\mp(h + \frac{1}{4}h^3)\tau \pm \left(\frac{1}{6}h + \frac{1}{8}h^3 + \frac{1}{6}h^5 + \frac{5}{384}h^7 \right) \tau^3 + \dots \right) \times \\ & \cos(y^\pm) + \\ & \left(h - \left(\frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h^3 + \frac{1}{16}h^5 \right) \tau^2 + \dots \right) \sin(y^\pm) + \\ & \left(\pm(\frac{1}{4}h^3)\tau \mp \left(\frac{9}{8}h^3 + \frac{27}{32}h^5 + \frac{27}{128}h^7 \right) \tau^3 + \dots \right) \cos(3y^\pm) + \\ & \left(\left(\frac{3}{4}h^3 + \frac{9}{32}h^5 \right) \tau^2 + \dots \right) \sin(3y^\pm) + \dots \end{aligned}$$

Gauname patogias aproksimacinės formulės, esant neapibrėžtam parametrai uždavinio pradinėse sąlygose.

3.1.6. Rezonansinis atvejis

Dabar nagrinėsime rezonansinį atvejį, t. y. kai (3.16) sistemoje ω yra lyginis skaičius. Šią sistemą spręsimė konstruojant (3.18), (3.19) artinius, pasinaudojus parašyta programa Maple terpėje.

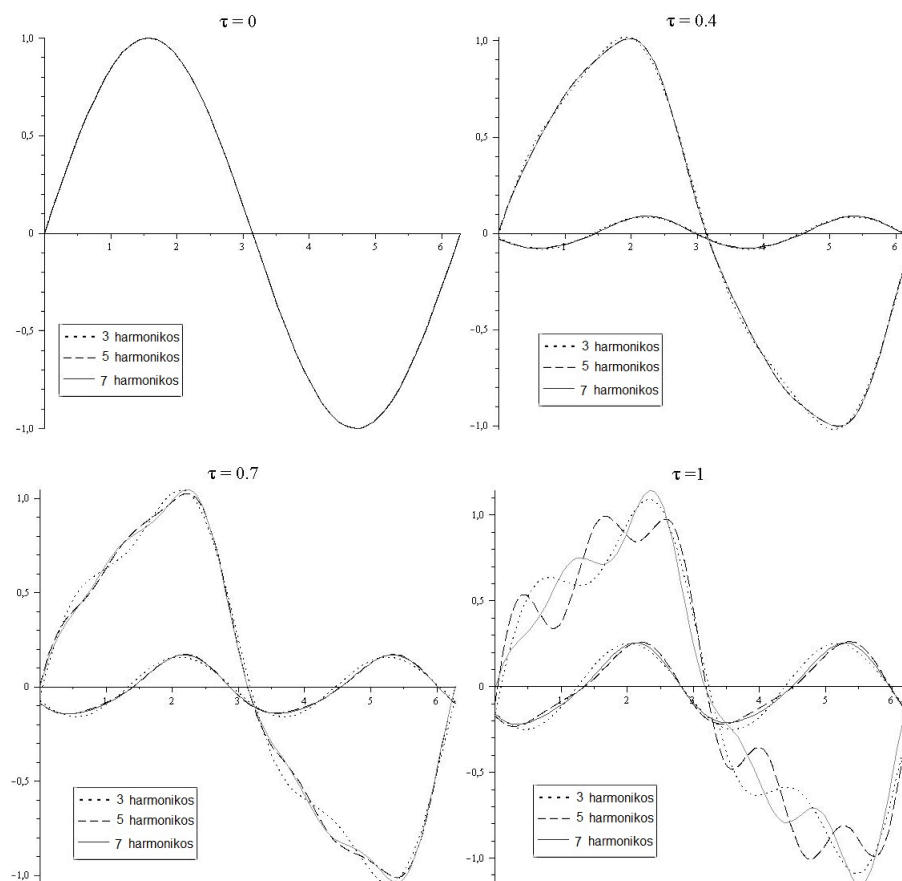
Atlikime tyrimą, esant periodinėms pradinėms sąlygoms (žr. A priedą)

$$R^+(\tau, y)|_{\tau=0} = \sin(y^+), \quad R^-(\tau, y)|_{\tau=0} = 0. \quad (3.25)$$

Parodysime skaičiavimo rezultatus, kai (3.18) formulėje $M = 3$, $M = 5$, $M = 7$.

Iš pateiktų grafikų (3.3 pav.) matome, kad skaičiavimų grafiniam tikslumui užtikrinti pakanka imti $N = 7$. Galima parodyti, kad tas pats galioja ir polinomų laipsniui $M = 7$.

Pastebėsime, kad dėl bangų rezonansinės sąveikos, laikui bėgant atsiranda bangą R^- , nors laiko momentu $\tau = 0$ R^- buvo nulinė funkcija. Pastebėsime, kad nerezonansiniu atveju banga R^- neatsiranda, t. y. esant visiems τ turime $R^- \equiv 0$.



3.3 pav. Funkcijų $R_{7,3}^{\pm}$, $R_{7,5}^{\pm}$, $R_{7,7}^{\pm}$ grafikai, su skirtingom τ reikšmėm
 Fig. 3.3. Graphs of $R_{7,3}^{\pm}$, $R_{7,5}^{\pm}$, $R_{7,7}^{\pm}$ for different τ

3.1.7. Stygos profilis

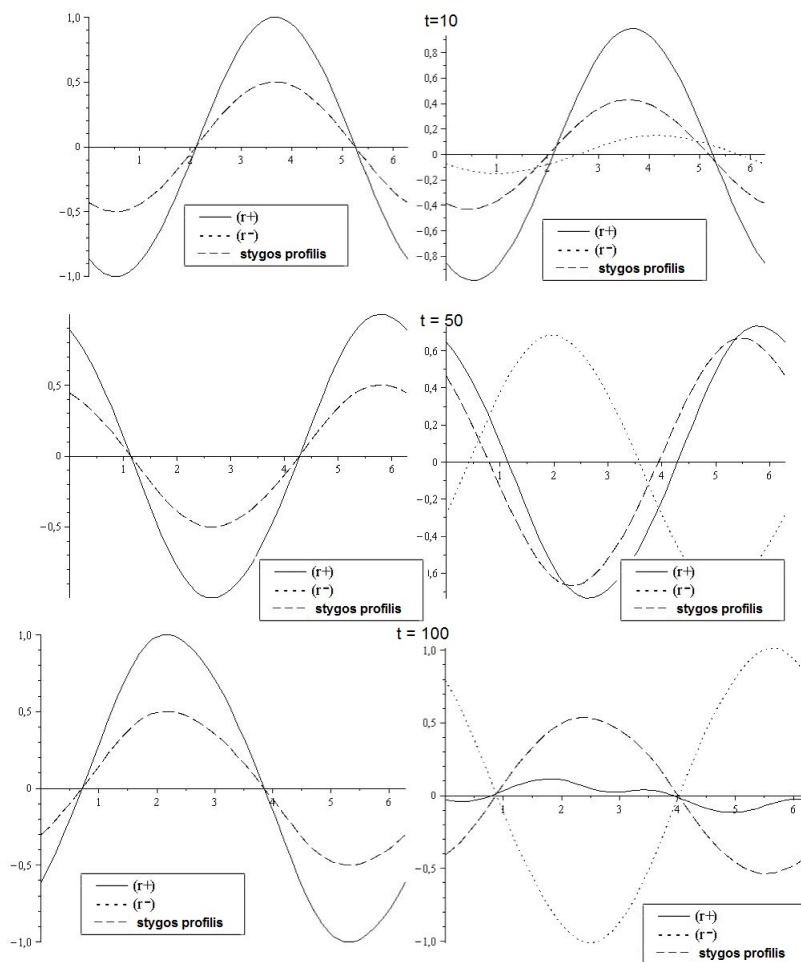
Taikant pateiktą asimptotinio integravimo metodą, parodysime absoliučiai tamprios nesvarios stygos profilio kitimo dinamiką. Kadangi turime formules Rymano invariantams $r^+ = u_t + u_x$ ir $r^- = u_t - u_x$, gauname, kad $u_x = \frac{r^+ - r^-}{2}$.

Grįžtame prie greitųjų charakteristinių kintamųjų: $y^- = x - t$, $y^+ = x + t$ ir užrašome stygos profilio lygtį $u = \int \frac{r^+ - r^-}{2} dx + C$.

Stygos profilio kitimo dinamiką nagrinėsime nerezonansiniu ir rezonansiniu atvejais, kai $N = 7$; $M = 7$; $\beta = 0,35$; $\omega = 1$; $\alpha = 3,0$. Pradiniu

laiko momentu turime Rymano invariantus $r^+(0,x) = \sin(x)$, $r^-(0,x) = 0$ ir atitinkamos stygos profilis $u(0,x) = \frac{1}{2} \sin(x)$. Rodome funkcijų $u(t,x;\varepsilon)$, $r^+(t,x;\varepsilon)$, $r^-(t,x;\varepsilon)$ artinių grafikus, kai $\varepsilon = 0,01$ it t kinta nuo 10 iki 100 (t reikšmės nurodytos) (žiūrėti 3.4 pav.).

Kairėje pusėje parodytos funkcijos nerezonansiniu atveju. Atkreipkime dėmesį, kad banga r^- šiuo atveju neatsiranda, t. y. $r^- \equiv 0$. Dešinėje pusėje tos pačios funkcijos pavaizduotos rezonansiniu atveju.



3.4 pav. Stygos profilio kitimo dinamiką nerezonansiniu ir rezonansiniu atvejais

Fig. 3.4. Profiles of string in nonresonance and resonance cases

3.2. Dujų dinamikos lygčių sistemos asimptotinė analizė

3.2.1. Uždavinio formulavimas

Nagrinėsime dujų dinamikos pirmosios eilės diferencialinių lygčių sistemą (Krylovas, Čiegis 2001):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(P - \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u^2 \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \mathcal{E} + \rho \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u \left(\mathcal{E} + \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) - \nu u \frac{\partial u}{\partial x} - \varkappa \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Čia ρ – dujų tankis, u – greitis, θ – temperatūra, P – slėgis, \mathcal{E} – vidinė energija.

Kai sistemoje (3.26) šilumos laidumo \varkappa ir klampumo ν koeficientai lygūs nuliui, ji užrašoma tokiu pavidalu:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (P + \rho u^2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \mathcal{E} + \rho \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u \mathcal{E} + P u + \rho \frac{u^3}{2} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Fizikine prasme nagrinėjamos dujų rimties būsenos mažos perturbacijos (trikdžiai), dėl kurių atsiranda akustinių bangų sąveika. Čia aprašoma asimptotinė uždavinio analizė leidžia tyrinėti periodinių bangų rezonansinės sąveikos subtilybes bei nagrinėti realias dujas.

(3.27) sistema papildoma būsenos lygtimis, kurie nepriklauso nuo dujų savybių:

$$P = P(\rho, \theta), \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \theta). \quad (3.28)$$

Iš pirmosios (3.27) sistemos lygties gauname, kad $\rho_t = -(\rho u)_x$, o iš antrosios: $u_t = -\frac{1}{\rho} (u \rho_t + P_x + (\rho u^2)_x) =$

$$-\frac{1}{\rho}(u(\rho u)_x + P_x + u_x(\rho u) + u(\rho u)_x) = -uu_x - \frac{1}{\rho}P_x.$$

Pertvarkome trečiąją (3.27) sistemos lygtį:

$$\begin{aligned} ((\rho_t + (\rho u)_x) \mathcal{E} + \rho \mathcal{E}_t + (\rho u)_x \mathcal{E}_x + \rho_t \frac{u^2}{2} + \rho u u_t + P_x u + P u_x + \rho_x \frac{u^3}{2} + \frac{3}{2} \rho u^2 u_x = \\ \rho \mathcal{E}_t + (\rho u)_x \mathcal{E}_x - (\rho u)_x \frac{u^2}{2} - \rho u^2 u_x - u P_x + P_x u + P u_x + \rho_x \frac{u^3}{2} + \frac{3}{2} \rho u^2 u_x = 0. \end{aligned}$$

Iš čia gauname:

$$\rho \mathcal{E}_t + (\rho u)_x \mathcal{E}_x + P u_x = \rho(\mathcal{E}_\rho \rho_t + \mathcal{E}_\theta \theta_t) + (\rho u)(\mathcal{E}_\rho \rho_t + \mathcal{E}_\theta \theta_t) + P u_x = \rho \mathcal{E}_\theta \theta_t + \rho u \mathcal{E}_\theta \theta_x - \rho \mathcal{E}_\rho (u \rho)_x + \rho u \mathcal{E}_\rho \rho_x + P u_x = 0.$$

Taigi (3.27) sistemą perrašome taip:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ u_t + u u_x + \frac{1}{\rho}(P_\rho \rho_x + P_\theta \theta_x) = 0, \\ \theta_t + u \theta_x = \frac{1}{\rho \mathcal{E}_\theta}(P - \mathcal{E}_\rho \rho^2) u_x. \end{cases} \quad (3.29)$$

3.2.2. Sistemos užrašymas Rymano invariantais

Pastebėję, kad $(\rho_0, u_0, \theta_0) - \text{const}$ tenkina (3.29) sistemą, ieškosime tokio pavidalo sprendinių:

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1(t, x; \varepsilon), \quad u = u_0 + \varepsilon u_1(t, x; \varepsilon), \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1(t, x; \varepsilon). \quad (3.30)$$

Kai ε – mažas teigiamas parametras, skleidžiame būsenos funkcijas (3.29) sistemoje Teiloro formule:

$$P_\rho(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, \theta_0 + \varepsilon \theta_1) = P_{0\rho} + \varepsilon(P_{0\rho\rho} \rho_1 + P_{0\rho\theta} \theta_1) + O(\varepsilon^2),$$

$$P_\theta(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, \theta_0 + \varepsilon \theta_1) = P_{0\theta} + \varepsilon(P_{0\theta\rho} \rho_1 + P_{0\theta\theta} \theta_1) + O(\varepsilon^2),$$

$$P(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, \theta_0 + \varepsilon \theta_1) = P_0 + \varepsilon(P_{0\rho} \rho_1 + P_{0\theta} \theta_1) + O(\varepsilon^2),$$

$$\mathcal{E}_\theta(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, \theta_0 + \varepsilon \theta_1) = \mathcal{E}_{0\theta} + \varepsilon(\mathcal{E}_{0\theta\rho} \rho_1 + \mathcal{E}_{0\theta\theta} \theta_1) + O(\varepsilon^2),$$

$$\mathcal{E}_\rho(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, \theta_0 + \varepsilon \theta_1) = \mathcal{E}_{0\rho} + \varepsilon(\mathcal{E}_{0\rho\rho} \rho_1 + \mathcal{E}_{0\rho\theta} \theta_1) + O(\varepsilon^2),$$

čia

$$\begin{aligned}
 P_0 &= P(\rho_0, \theta_0), \quad P_{0\theta} = \frac{\partial P(\rho_0, \theta_0)}{\partial \theta}, \quad P_{0\rho} = \frac{\partial P(\rho_0, \theta_0)}{\partial \rho}, \\
 P_{0\theta\theta} &= \frac{\partial^2 P(\rho_0, \theta_0)}{\partial \theta^2}, \quad P_{0\theta\rho} = \frac{\partial^2 P(\rho_0, \theta_0)}{\partial \theta \partial \rho}, \quad P_{0\rho\rho} = \frac{\partial^2 P(\rho_0, \theta_0)}{\partial \rho^2}, \\
 \mathcal{E}_{0\rho} &= \frac{\partial \mathcal{E}(\rho_0, \theta_0)}{\partial \rho}, \quad \mathcal{E}_{0\theta} = \frac{\partial \mathcal{E}(\rho_0, \theta_0)}{\partial \theta}, \\
 \mathcal{E}_{0\rho\rho} &= \frac{\partial^2 \mathcal{E}(\rho_0, \theta_0)}{\partial \rho^2}, \quad \mathcal{E}_{0\theta\theta} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}(\rho_0, \theta_0)}{\partial \theta^2}, \quad \mathcal{E}_{0\rho\theta} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}(\rho_0, \theta_0)}{\partial \rho \partial \theta}.
 \end{aligned}$$

Įrašę (3.30) į (3.29) ir pasinaudoję formulėmis $\frac{1}{\rho_0 + \varepsilon\rho_1} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{\varepsilon\rho_1}{\rho_0^2} + O(\varepsilon^2)$ ir $\frac{1}{(\rho_0 + \varepsilon\rho_1)\mathcal{E}_\theta(\rho_0 + \varepsilon\rho_1, \theta_0 + \varepsilon\theta_1)} = \frac{1}{\rho_0\mathcal{E}_{0\theta}} - \varepsilon \left(\frac{\rho_1}{\rho_0^2\mathcal{E}_{0\theta}} + \frac{\mathcal{E}_{0\theta\rho}\rho_1 + \mathcal{E}_{0\theta\theta}\theta_1}{\rho_0\mathcal{E}_{0\theta}^2} \right) + O(\varepsilon^2)$,

perrašome (3.29) sistemos lygtis taip:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\rho_{1t} + \rho_0 u_{1x} + u_0 \rho_{1x} = -\varepsilon(\rho_1 u_1)_x, \\
 &u_{1t} + u_0 u_{1x} + \frac{P_{0\rho}}{\rho_0} \rho_{1x} + \frac{P_{0\theta}}{\rho_0} \theta_{1x} = -\varepsilon \left[u_1 u_{1x} + \frac{1}{\rho_0} (P_{0\rho\rho} \rho_1 + P_{0\rho\theta} \theta_1) \rho_{1x} + \frac{1}{\rho_0} (P_{0\theta\rho} \rho_1 + P_{0\theta\theta} \theta_1) \theta_{1x} - \frac{\rho_1}{\rho_0^2} (P_{0\rho} \rho_{1x} + P_{0\theta} \theta_{1x}) \right] + \\
 &O(\varepsilon^2), \\
 &\theta_{1t} + u_0 \theta_{1x} + \frac{P_0 - \mathcal{E}_{0\rho}\rho_0^2}{\mathcal{E}_{0\theta}\rho_0} u_{1x} = -\varepsilon \left[u_1 \theta_{1x} - \frac{1}{\rho_0 \mathcal{E}_{0\theta}} (P_{0\rho} \rho_1 + P_{0\theta} \theta_1) - 2\mathcal{E}_{0\rho}\rho_0 \rho_1 - \mathcal{E}_{0\rho\rho} \rho_1 \rho_0^2 - \mathcal{E}_{0\rho\theta} \theta_1 \rho_0^2 \right] u_{1x} + \left(\frac{\rho_1}{\mathcal{E}_{0\theta}\rho_0^2} + \frac{\mathcal{E}_{0\theta\rho}\rho_1 + \mathcal{E}_{0\theta\theta}\theta_1}{\rho_0 \mathcal{E}_{0\theta}^2} \right) (P_0 - \mathcal{E}_{0\rho}\rho_0^2) u_{1x} \right] + O(\varepsilon^2).
 \end{aligned} \right. \quad (3.31)$$

Pažymėsime

$$U = (\rho_1, u_1, \theta_1)^T, \quad U_t = (\rho_{1t}, u_{1t}, \theta_{1t})^T, \quad U_x = (\rho_{1x}, u_{1x}, \theta_{1x})^T,$$

$$W = (\rho_1 \rho_{1x}, \rho_1 u_{1x}, \rho_1 \theta_{1x}, u_1 \rho_{1x}, u_1 u_{1x}, u_1 \theta_{1x}, \theta_1 \rho_{1x}, \theta_1 u_{1x}, \theta_1 \theta_{1x})^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 & 0 \\ \frac{P_{0\rho}}{\rho_0} & u_0 & \frac{P_{0\theta}}{\rho_0} \\ \rho_0 & \bar{P} & u_0 \end{pmatrix}, \quad \bar{P} = \frac{P_0 - \mathcal{E}_{0\rho}\rho_0^2}{\rho_0 \mathcal{E}_{0\theta}}.$$

Tada (3.31) sistemą užrašome matriciniu pavidalu:

$$U_t + AU_x = \varepsilon HW + O(\varepsilon^2). \quad (3.32)$$

Čia 3×9 matrica

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{211} & 0 & h_{213} & 0 & -1 & 0 & h_{231} & 0 & h_{233} \\ 0 & h_{312} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & h_{332} & 0 \end{pmatrix},$$

kurios nenuliniai elementai pažymėti:

$$\begin{aligned} h_{211} &= -\frac{P_{0\rho\rho}}{\rho_0} + \frac{P_{0\rho}}{\rho_0^2}, \\ h_{213} &= -\frac{P_{0\rho\theta}}{\rho_0} + \frac{P_{0\theta}}{\rho_0^2}, \\ h_{231} &= -\frac{P_{0\rho\theta}}{\rho_0}, \\ h_{233} &= -\frac{P_{0\theta\theta}}{\rho_0}, \\ h_{312} &= \frac{P_{0\rho} - 2\varepsilon_{0\rho\rho} - \varepsilon_{0\rho\rho}\rho_0^2}{\rho_0\varepsilon_{0\theta}} + \frac{P_0 - \varepsilon_{0\rho}\rho_0^2}{\varepsilon_{0\theta}\rho_0^2} + \frac{P_0\varepsilon_{0\theta\rho} - \varepsilon_{0\rho\theta}\varepsilon_{0\rho}\rho_0^2}{\rho_0\varepsilon_{0\theta}^2}, \\ h_{332} &= \frac{P_{0\theta} - 2\varepsilon_{0\rho\theta}\rho_0^2}{\rho_0\varepsilon_{0\theta}} + \frac{P_0\varepsilon_{0\theta\theta} - \varepsilon_{0\theta\theta}\varepsilon_{0\rho}\rho_0^2}{\rho_0\varepsilon_{0\theta}^2}. \end{aligned}$$

Apskaičiuosime matricos A tikrines reikšmes:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} u_0 - \lambda & \rho_0 & 0 \\ \frac{P_{0\rho}}{\rho_0} & u_0 - \lambda & \frac{P_{0\theta}}{\rho_0} \\ 0 & \bar{P} & u_0 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (u_0 - \lambda)^3 - \bar{P} \frac{P_{0\theta}}{\rho_0} (u_0 - \lambda) - \rho_0 \frac{P_{0\rho}}{\rho_0} (u_0 - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Iš čia gauname

$$(u_0 - \lambda) \left((u_0 - \lambda)^2 - \bar{P} \frac{P_{0\theta}}{\rho_0} - \rho_0 \frac{P_{0\rho}}{\rho_0} \right) = 0.$$

Taigi tikrinės reikšmės yra

$$\lambda_1 = u_0 + \lambda_0, \quad \lambda_2 = u_0, \quad \lambda_3 = u_0 - \lambda_0, \quad (3.33)$$

čia $\lambda_0 = \sqrt{\frac{\bar{P}P_{0\theta}}{\rho_0} + P_{0\rho}}$ – garso greitis.

Straipsnyje (Krylovas, Čiegis 2001) buvo nagrinėjamos idealiosios politropinės dujos. Tada $P = \mathcal{R}\rho\theta$, $\mathcal{E} = c_v\theta$ ir turėsime:

$$\mathcal{E}_{0\rho} = 0, \quad \mathcal{E}_{0\theta} = c_v, \quad \bar{P} = \frac{\mathcal{R}\rho_0\theta_0}{\rho_0 c_v} = \frac{\mathcal{R}\theta_0}{c_v},$$

$$P_{0\theta} = \mathcal{R}\rho_0, \quad P_{0\rho} = \mathcal{R}\theta_0, \quad \lambda_0 = \sqrt{\mathcal{R}\theta_0 \left(\frac{\mathcal{R}}{c_v} + 1 \right)}.$$

Bendruoju atveju funkcijos $P(\rho, \theta)$ ir $\mathcal{E}(\rho, \theta)$ gali turėti sudėtingą pavidalą. Pavyzdžiui, Van der Vaalso dujoms:

$$P = \frac{\mathcal{R}\theta\rho}{1 - b\rho} - a\rho^2, \quad \mathcal{E} = f(\theta) - a\rho,$$

konstantos a ir b priklauso nuo dujų molekulinėms savybėms.

Tam, kad rasti transformaciją, matricos A Žordano formai (žr. pvz. Survila (1989)) gauti, ieškosime matricos A tikrinių vektorių.

1) Kai $\lambda = \lambda_1 = u_0 + \lambda_0$, turime

$$\begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 & 0 \\ \frac{P_{0\rho}}{\rho_0} & u_0 & \frac{P_{0\theta}}{\rho_0} \\ 0 & \bar{P} & u_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}(u_0 + \lambda_0) \\ r_{21}(u_0 + \lambda_0) \\ r_{31}(u_0 + \lambda_0) \end{pmatrix}.$$

Arba perrašome

$$\begin{cases} u_0 r_{11} + \rho_0 r_{21} = r_{11} u_0 + r_{11} \lambda_0, \\ \frac{P_{0\rho}}{\rho_0} r_{11} + u_0 r_{21} + \frac{P_{0\theta}}{\rho_0} r_{31} = r_{21} u_0 + r_{21} \lambda_0, \\ \frac{\rho_0}{\bar{P}} r_{21} + u_0 r_{31} = r_{31} u_0 + r_{31} \lambda_0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Sistema turi tris nežinomuosius, o jos rangas lygus 2. Todėl turime vieną laisvąjį kintamąjį (pasirinkime jį r_{21}).

Tada iš sistemos gauname, kad $r_{11} = \frac{\rho_0}{\lambda_0} r_{21}$, $r_{31} = \frac{\bar{P}}{\lambda_0} r_{21}$.

2) Analogiškai sprendžiame uždavinį, kai $\lambda = \lambda_2 = u_0$:

$$\begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 & 0 \\ \frac{P_{0\rho}}{P} & u_0 & \frac{P_{0\theta}}{P} \\ \rho_0 & \bar{P} & u_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{12}u_0 \\ r_{22}u_0 \\ r_{32}u_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} u_0 r_{12} + \rho_0 r_{22} = r_{12}u_0, \\ \frac{P_{0\rho}}{P} r_{12} + u_0 r_{22} + \frac{P_{0\theta}}{P} r_{32} = r_{22}u_0, \\ \frac{\rho_0}{\bar{P}} r_{22} + u_0 r_{32} = r_{32}u_0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Iš sistemos gauname, kad $r_{12} = -\frac{P_{0\theta}}{P_{0\rho}} r_{32}$, $r_{22} = 0$.

3) Ir, kai $\lambda = \lambda_3 = u_0 - \lambda_0$:

$$\begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 & 0 \\ \frac{P_{0\rho}}{P} & u_0 & \frac{P_{0\theta}}{P} \\ \rho_0 & \bar{P} & u_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{13}(u_0 - \lambda_0) \\ r_{23}(u_0 - \lambda_0) \\ r_{33}(u_0 - \lambda_0) \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} u_0 r_{13} + \rho_0 r_{23} = r_{13}u_0 - r_{13}\lambda_0, \\ \frac{P_{0\rho}}{P} r_{13} + u_0 r_{23} + \frac{P_{0\theta}}{P} r_{33} = r_{23}u_0 - r_{23}\lambda_0, \\ \frac{\rho_0}{\bar{P}} r_{23} + u_0 r_{33} = r_{33}u_0 - r_{33}\lambda_0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Gauname, kad $r_{13} = -\frac{\rho_0}{\lambda_0} r_{23}$, $r_{33} = -\frac{\bar{P}}{\lambda_0} r_{23}$.

Perrašome (3.32) sistemą Rymano invariantais. Iš matricos A tikrinių vektorių sudarome neišsigimusių transformacijos matricą (nagrinėjame atvejį, kai $r_{21} = r_{23} = r_{32} = 1$)

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0}{\lambda_0} & -\frac{P_{0\theta}}{P_{0\rho}} & -\frac{\rho_0}{\lambda_0} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{\bar{P}}{\lambda_0} & 1 & -\frac{\bar{P}}{\lambda_0} \end{pmatrix}.$$

Tada

$$R^{-1}AR = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Pažymėjame

$$V = (v_1, v_2, v_3)^T, V_t = (v_{1t}, v_{2t}, v_{3t})^T, V_x = (v_{1x}, v_{2x}, v_{3x})^T,$$

$$Q = (v_1 v_{1x}, v_1 v_{2x}, v_1 v_{3x}, v_2 v_{1x}, v_2 v_{2x}, v_2 v_{3x}, v_3 v_{1x}, v_3 v_{2x}, v_3 v_{3x})^T$$

ir pakeičiame (3.32) sistemos nepriklausomą kintamąjį $U = RV$. Tada iš (3.32) gauname

$$RV_t + ARV_x = \varepsilon HKQ + O(\varepsilon^2), \quad (3.37)$$

čia $K = \|k_{ij}\|_{9 \times 9}$ – matrica, kurią gauname keičiant kintamuosius:

$$\rho_1 = \alpha (v_1 - v_3) - \beta v_2,$$

$$u_1 = v_1 + v_3,$$

$$\theta_1 = \gamma (v_1 - v_3) + v_2,$$

čia pažymėta:

$$\alpha = \frac{\rho_0}{\lambda_0}, \quad \beta = \frac{P_{0\theta}}{P_{0\rho}}, \quad \gamma = \frac{\bar{P}}{\lambda_0},$$

t. y. matricos R elementai pažymėti taip:

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\alpha \\ 1 & 0 & 1 \\ \gamma & 1 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Matricos K elementus gauname grupuojant sandaugų narius:

$$\begin{aligned}
\rho_1\rho_{1x} &= [\alpha v_1 - \alpha v_3 - \beta v_2][\alpha v_{1x} - \alpha v_{3x} - \beta v_{2x}] = \alpha^2 v_1 v_{1x} - \alpha^2 v_1 v_{3x} - \\
&\alpha\beta v_1 v_{2x} - \alpha^2 v_3 v_{1x} + \alpha^2 v_3 v_{3x} + \alpha\beta v_3 v_{2x} - \alpha\beta v_2 v_{1x} + \alpha\beta v_2 v_{3x} + \beta^2 v_2 v_{2x}, \\
\rho_1 u_{1x} &= [\alpha v_1 - \alpha v_3 - \beta v_2][v_{1x} + v_{3x}] = \alpha v_1 v_{1x} + \alpha v_1 v_{3x} - \beta v_2 v_{1x} - \\
&\beta v_2 v_{3x} - \alpha v_3 v_{1x} - \alpha v_3 v_{3x}, \\
\rho_1 \theta_{1x} &= [\alpha v_1 - \alpha v_3 - \beta v_2][\gamma v_{1x} + v_{2x} - \gamma v_{3x}] = \alpha\gamma v_1 v_{1x} + \alpha v_1 v_{2x} - \\
&\alpha\gamma v_1 v_{3x} - \beta\gamma v_2 v_{1x} - \beta v_2 v_{2x} + \gamma\beta v_2 v_{3x} - \alpha\gamma v_3 v_{1x} - \alpha v_3 v_{2x} + \alpha\gamma v_3 v_{3x}, \\
u_1\rho_{1x} &= [v_1 + v_3][\alpha v_{1x} - \alpha v_{3x} - \beta v_{2x}] = \alpha v_1 v_{1x} - \beta v_1 v_{2x} - \alpha v_1 v_{3x} + \\
&\alpha v_3 v_{1x} - \beta v_3 v_{2x} - \alpha v_3 v_{3x}, \\
u_1 u_{1x} &= [v_1 + v_3][v_{1x} + v_{3x}] = v_1 v_{1x} + v_1 v_{3x} + v_3 v_{1x} + v_3 v_{3x}, \\
u_1 \theta_{1x} &= [v_1 + v_3][\gamma v_{1x} + v_{2x} - \gamma v_{3x}] = \gamma v_1 v_{1x} + v_1 v_{2x} - \gamma v_1 v_{3x} + \\
&\gamma v_3 v_{1x} + v_3 v_{2x} - \gamma v_3 v_{3x}, \\
\theta_1\rho_{1x} &= [\gamma v_1 + v_2 - \gamma v_3][\alpha v_{1x} - \alpha v_{3x} - \beta v_{2x}] = \alpha\gamma v_1 v_{1x} - \beta\gamma v_1 v_{2x} - \\
&\alpha\gamma v_1 v_{3x} + \alpha v_2 v_{1x} - \beta v_2 v_{2x} - \alpha v_2 v_{3x} - \alpha\gamma v_3 v_{1x} + \beta\gamma v_3 v_{2x} + \alpha\gamma v_3 v_{3x}, \\
\theta_1 u_{1x} &= [\gamma v_1 + v_2 - \gamma v_3][v_{1x} + v_{3x}] = \gamma v_1 v_{1x} + \gamma v_1 v_{3x} + v_2 v_{1x} + v_2 v_{3x} - \\
&\gamma v_3 v_{1x} - \gamma v_3 v_{3x}, \\
\theta_1 \theta_{1x} &= [\gamma v_1 + v_2 - \gamma v_3][\gamma v_{1x} + v_{2x} - \gamma v_{3x}] = \gamma^2 v_1 v_{1x} + \gamma v_1 v_{2x} - \\
&\gamma^2 v_1 v_{3x} + \gamma v_2 v_{1x} + v_2 v_{2x} - \gamma v_2 v_{3x} - \gamma^2 v_3 v_{1x} - \gamma v_3 v_{2x} + \gamma^2 v_3 v_{3x}.
\end{aligned}$$

Taigi surašome gaunamus matricos koeficientus:

$$K = \begin{pmatrix}
\alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha^2 & -\alpha\beta & \beta^2 & \alpha\beta & -\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha^2 \\
\alpha & 0 & \alpha & -\beta & 0 & -\beta & -\alpha & 0 & -\alpha \\
\alpha\gamma & \alpha & -\alpha\gamma & -\beta\gamma & -\beta & \gamma\beta & -\alpha\gamma & -\alpha & \gamma\alpha \\
\alpha & -\beta & -\alpha & 0 & 0 & 0 & \alpha & -\beta & -\alpha \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\gamma & 1 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & \gamma & 1 & -\gamma \\
\alpha\gamma & -\beta\gamma & -\alpha\gamma & \alpha & -\beta & -\alpha & -\alpha\gamma & \beta\gamma & \alpha\gamma \\
\gamma & 0 & \gamma & 1 & 0 & 1 & -\gamma & 0 & -\gamma \\
\gamma^2 & \gamma & -\gamma^2 & \gamma & 1 & -\gamma & -\gamma^2 & -\gamma & \gamma^2
\end{pmatrix}.$$

Matricos R atvirkštinę matricą užrašykime taip:

$$R^{-1} = \frac{1}{2d} \begin{pmatrix} 1 & d & \beta \\ -2\gamma & 0 & 2\alpha \\ -1 & d & -\beta \end{pmatrix},$$

čia $d = \alpha + \beta\gamma$ ($\det R = -2d$).

Dauginame (3.37) matricinę lygtį iš kairės iš matricos R^{-1} ir gauname

$$V_t + \Lambda V_x = \varepsilon FQ + O(\varepsilon^2), \quad (3.38)$$

čia

$$F = R^{-1}HK = \begin{pmatrix} f_{111} & f_{112} & f_{113} & f_{121} & f_{122} & f_{123} & f_{131} & f_{132} & f_{133} \\ f_{211} & f_{212} & f_{213} & f_{221} & f_{222} & f_{223} & f_{231} & f_{232} & f_{233} \\ f_{311} & f_{312} & f_{313} & f_{321} & f_{322} & f_{323} & f_{331} & f_{332} & f_{333} \end{pmatrix},$$

ir pažymėję matricą

$$L = \begin{pmatrix} dh_{211} & -1 + \beta h_{312} & dh_{213} & -1 & -d & -\beta & dh_{231} & \beta h_{332} & dh_{233} \\ 0 & 2\gamma + 2\alpha h_{312} & 0 & 2\gamma & 0 & -2\alpha & 0 & 2\alpha h_{332} & 0 \\ dh_{211} & 1 - \beta h_{312} & dh_{213} & 1 & -d & \beta & dh_{231} & -\beta h_{332} & dh_{233} \end{pmatrix},$$

gauname, kad

$$F = \frac{1}{2d}LK. \quad (3.39)$$

Atmetame eilės $O(\varepsilon^2)$ narius ir perrašome (3.38) matricinę lygtį koordinatiniu pavidalu:

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial x} = \varepsilon \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 f_{jik} v_i \frac{\partial v_k}{\partial x}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.40)$$

Pastebėsime, kad (3.40) pavidalas galioja esant bet kurioms būsenos lygtims (3.28), t. y. nepriklauso nuo dujų savybių.

3.2.3. Suvidurkintos sistemos tyrimas

Sudarykime atitinkamą suvidurkintų lygčių sistemą:

$$\frac{\partial V_j}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 f_{jik} M_j \left[V_i \frac{\partial V_k}{\partial y_k} \right], \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.41)$$

Čia $\tau = \varepsilon t$ – lėtas laikas, $y_j = x - \lambda_j t$ – greitas charakteristinis kintamasis, vidurkinimo pagal charakteristikas operatoriai M_j apibrėžiami taip:

$$M_j \left[V_i(\tau, y_i) \frac{\partial V_k(\tau, y_k)}{\partial y_k} \right] \equiv$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T V_i(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_i)s) \frac{\partial V_k(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s)}{\partial y_j} ds. \quad (3.42)$$

Pastebėsime, kad (periodinėms pagal y_j funkcijoms, žr. disertacijos 2 skyrių: 2.4, 2.5 lemas, 26 psl.)

$$M_j \left[V_j \frac{\partial V_k}{\partial y_k} \right] = V_j M_j \left[\frac{\partial V_k}{\partial y_k} \right] = 0, \quad (3.43)$$

$$M_j \left[V_j \frac{\partial V_j}{\partial y_j} \right] = V_j \frac{\partial V_j}{\partial y_j}. \quad (3.44)$$

Tarkime, kad $V_j(\tau, y_j) \in C_{2\pi}^1([0, \tau^0] \times R)$.

Pažymėsime $\bar{V}_j(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_j(\tau, y_j) dy_j$. Atkreipkime dėmesį, kad

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial V_j(\tau, y_j)}{\partial y_j} dy_j = \frac{1}{2\pi} (V_j(\tau, 2\pi) - V_j(\tau, 0)) = 0,$$

ir

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_j(\tau, y_j) \frac{\partial V_j(\tau, y_j)}{\partial y_j} dy_j = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_j} V_j^2(\tau, y_j) dy_j = 0.$$

Tarkime, kad $i \neq j \neq k \neq i$. Tada skleidami funkcijas V_j Furjė eilutėmis

$$V_j(\tau, y_j) = \sum_{l_j=-\infty}^{l_j} V_{jl_j}(\tau) e^{il_j y_j}, \quad \mathbf{i} = \sqrt{-1},$$

matome, kad

$$M_j \left[V_i \frac{\partial V_k}{\partial y_k} \right] = \sum_{l_i, l_k: l_i(\lambda_j - \lambda_i) + l_k(\lambda_j - \lambda_k) = 0} l_k V_{il_i}(\tau) V_{kl_k}(\tau) e^{i(l_i + l_k)y_j}. \quad (3.45)$$

Todėl $\int_0^{2\pi} M_j \left[V_i \frac{\partial V_k}{\partial y_k} \right] dy_j \neq 0$ tada ir tik tada, kai

$$\begin{cases} l_i + l_k = 0, \\ l_k \neq 0, \\ l_i(\lambda_j - \lambda_i) + l_k(\lambda_j - \lambda_k) = 0. \end{cases}$$

Kadangi turime $\lambda_1 = u_0 + \lambda_0$, $\lambda_2 = u_0$, $\lambda_3 = u_0 - \lambda_0$ ir $\lambda_0 > 0$, ši sistema neturi sprendinių l_i , l_k .

Taigi integruodami (3.41) sistemos lygtis pagal y_j nuo 0 iki 2π ir atsižvelgdami į (3.43), (3.44) gauname, $\frac{d\bar{V}_j}{d\tau} = 0$.

Pareikalausime:

$$\bar{V}_j(0, y_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_j(0, y_j) dy_j = 0. \quad (3.46)$$

Integruojame (3.42) dalimis ($i \neq j \neq k \neq i$)

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T V_i(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_i)s) \frac{\partial V_k(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s)}{\partial y_j} ds = \\ & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T(\lambda_j - \lambda_k)} \int_0^T V_i(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_i)s) dV_k(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s) ds = \\ & 0 - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda_j - \lambda_i}{T(\lambda_j - \lambda_k)} \int_0^T V_k(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s) \frac{\partial V_i(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_i)s)}{\partial y_j} ds. \end{aligned}$$

Taigi įrodytas toks

1 teiginys . $\forall (i \neq j \neq k \neq i)$

$$M_j \left[V_i \frac{\partial V_k}{\partial y_k} \right] = - \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_k} M_j \left[\frac{\partial V_i}{\partial y_i} V_k \right]. \quad (3.47)$$

Pereiname prie išsamesnio (3.41) suvidurkintos sistemos tyrimo.

Iš (3.39) matome, kad

$$f_{222} = 0 \cdot \beta^2 + (2\gamma + 2\alpha h_{312}) \cdot 0 - 0 \cdot \beta + 2\gamma \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 2\alpha \cdot 0 - \beta \cdot 0 + 2\alpha h_{332} \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0,$$

$$f_{213} = -f_{231} = \frac{\alpha}{d} ((\gamma + \alpha h_{312}) + \gamma h_{333}) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta\gamma} ((\gamma + \alpha h_{312}) + \gamma h_{333}).$$

Pastebėję, kad iš (3.33) ir (3.47) formulės išplaukia, kad

$$M_2 \left[V_1 \frac{\partial V_3}{\partial y_3} \right] = -\frac{u_0 - (u_0 + \lambda_0)}{u_0 - (u_0 - \lambda_0)} M_2 \left[\frac{\partial V_1}{\partial y_1} V_3 \right],$$

t. y.

$$f_{213} M_2 \left[V_1 \frac{\partial V_3}{\partial y_3} \right] + f_{231} M_2 \left[V_3 \frac{\partial V_1}{\partial y_1} \right] = 0.$$

Taigi galioja 2 teiginys.

2 teiginys. Esant sąlygai (3.46) suvidurkintos (3.41) sistemos antroji lygtis užrašoma taip:

$$\frac{\partial V_2}{\partial \tau} = 0,$$

t. y. $V_2(\varepsilon t, x - u_0 t) = \varphi(x - u_0 t)$.

Pastebėsime, kad šis teiginys įrodytas esant bet kuriems koeficientams h_{jik} , t. y. nepriklauso nuo dujų būsenos lygčių $P = P(\rho, \theta)$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \theta)$ ir todėl galioja bet kurioms dujoms.

Taigi iš (3.43), (3.44) ir (3.46) gauname, kad (3.41) sistemą galima perrašyti taip:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial \tau} - f_{111} V_1 \frac{\partial V_1}{\partial y_1} = f_{123} M_1 \left[V_2 \frac{\partial V_3}{\partial y_3} \right] + f_{132} M_1 \left[V_3 \frac{\partial V_2}{\partial y_2} \right], \\ \frac{\partial V_3}{\partial \tau} - f_{333} V_3 \frac{\partial V_3}{\partial y_3} = f_{312} M_1 \left[V_1 \frac{\partial V_2}{\partial y_2} \right] + f_{321} M_1 \left[V_2 \frac{\partial V_1}{\partial y_1} \right]. \end{cases} \quad (3.48)$$

Pastebėsime, kad

$$\begin{aligned} f_{111} = f_{333} &= \frac{1}{2d} (-2\alpha + d(h_{211}\alpha^2 - 1 + h_{213}\alpha\gamma + h_{231}\alpha\gamma + h_{233}\gamma^2) \\ &+ \beta(\alpha h_{312} - \gamma + h_{332}\gamma)) = \frac{1}{2(\alpha + \beta\gamma)} (-2\alpha + \frac{1}{(\alpha + \beta\gamma)} \times \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$(h_{211}\alpha^2 - 1 + h_{213}\alpha\gamma + h_{231}\alpha\gamma + h_{233}\gamma^2) + \beta(\alpha h_{312} - \gamma + h_{332}\gamma) = \mu.$$

3 teiginys. Tarkime, kad galioja (3.46) sąlyga ir pradinio laiko momentu $t = 0$, dujų tankis ρ_1 ir temperatūra θ_1 tenkina sąlygą:

$$\rho_1(0, x; \varepsilon) = \frac{\rho_0^2 \mathcal{E}_{0\theta}}{P_0 - \mathcal{E}_{0\rho} \rho_0^2} \theta_1(t_0, x; \varepsilon) + O(\varepsilon). \quad (3.50)$$

Tada $\forall t \in \left[0, \frac{\tau^0}{\varepsilon}\right]$ galioja asimptotiniai artiniai:

$$\rho_1(t, x; \varepsilon) = \frac{\rho_0}{\lambda_0} (V_1(\varepsilon t, x - (u_0 + \lambda_0)t) - V_3(\varepsilon t, x - (u_0 - \lambda_0)t)) + O(\varepsilon),$$

$$\theta_1(t, x; \varepsilon) = \frac{\bar{P}}{\lambda_0} (V_1(\varepsilon t, x - (u_0 + \lambda_0)t) - V_3(\varepsilon t, x - (u_0 - \lambda_0)t)) + O(\varepsilon),$$

$$u_1(t, x; \varepsilon) = V_1(\varepsilon t, x - (u_0 + \lambda_0)t) + V_3(\varepsilon t, x - (u_0 - \lambda_0)t) + O(\varepsilon).$$

Čia funkcijos V_1, V_3 yra lygties

$$\frac{\partial V_j}{\partial \tau} - \mu V_j \frac{\partial V_j}{\partial y_j} = 0, \quad j = 1, 3 \quad (3.51)$$

sprendiniai.

Irodymas. Iš (3.50) gauname, kad $V_2(\tau, y_2) \equiv 0$ ir sistemos dešinės pusės lygties nului, todėl (3.48) sistemos lygtys yra nepriklausomos.

Bendroju atveju taikome (3.47) formulę ir perrašome (3.48) sistemą taip:

$$\frac{\partial V_j}{\partial \tau} - \mu V_j \frac{\partial V_j}{\partial y_j} = (f_{j2k} - 2f_{jk2}) M_j \left[V_2 \frac{\partial V_k}{\partial y_k} \right], \quad j = 1, 3, k = 3, 1.$$

Pastebėsime, kad

$$f_{123} - 2f_{132} = -f_{321} + 2f_{312} = \frac{1}{2d} (\beta - d(h_{211}\alpha\beta + h_{231}\beta\gamma - h_{231}\alpha - h_{233}\gamma) + \beta(-\beta h_{321} + h_{332})) = \frac{1}{2(\alpha + \beta\gamma)} (\beta - \quad (3.52)$$

$$\frac{1}{(\alpha + \beta\gamma)}(h_{211}\alpha\beta + h_{231}\beta\gamma - h_{231}\alpha - h_{233}\gamma) + \beta(-\beta h_{321} + h_{332}) = \nu.$$

Gauname

$$\frac{\partial V_{1,3}}{\partial \tau} - \mu V_{1,3} \frac{\partial V_{1,3}}{\partial y_{1,3}} = \pm \nu M_{1,3} \left[V_2 \frac{\partial V_{3,1}}{\partial y_{3,1}} \right]. \quad (3.53)$$

Taigi 2 ir 3 teiginiai nustato akustinių bangų rezonansinės sąveikos atsiradimo sąlygas. Kai (3.50) negalioja, bangos aprašomos (3.48) sistema, kuri išsiskaido į dvi nepriklausomas (3.51) lygtis, kai rezonanso nėra (žr. C priedą).

3.2.4. Realiųjų dujų analizė

Būsenos lygtis bendruoju atveju užrašoma taip

$$f(P, \rho, \theta) = 0. \quad (3.54)$$

Būsenos lygties negalima gauti iš termodinamikos dėsnių, ji gaunama iš empirinių duomenų arba statistinės fizikos metodais.

Paprasčiausias dujų dinamikos modelis – idealiosios dujos – konstruojamas esant prielaidoms, kad dujų atomai arba molekulės yra nesąveikaujantys tarpusavyje neturintys tūrio absoliučiai tamprieji materialieji taškai. Šiuo atveju sistemos būseną aprašo Klaipeirono (E. Clapeyron) lygtimi

$$P = \mathcal{R}\rho\theta. \quad (3.55)$$

Čia $\mathcal{R} = nR$, n – medžiagos kiekis [mol], $R = 8,31447 \left[\frac{J}{mol \cdot K} \right]$.

Realiosios dujos apytiksliai tenkina (3.55) lygtį tik esant pakankamai aukštai temperatūrai θ ir mažam tankiui ρ . Tiksliam realiųjų dujų būsenai reikšti empiriškai nustatyti keli šimtai būsenos lygčių. Paprasčiausia ir geriausiai žinoma yra Van der Vaalso (J.D. van der Waals) lygtis

$$\left(P + \frac{a}{\rho^2} \right) \left(\frac{1}{\rho} - b \right) = \mathcal{R}\theta. \quad (3.56)$$

Čia konstantos a , b priklauso nuo dujų savybių, o kai $a = b = 0$ (3.56) ir (3.55) lygtys yra ekvivalenčios.

Esant aukštam slėgiui P Van der Vaalso (3.56) lygtis yra netinkama, nes ji nemodeliuoja atsirandančių stūmos jėgų (Belyaev 1987). Todėl literatūro-

je nagrinėjamos įvairios (3.56) lygties modifikacijos. Paminėkime kelias dvi-parametrines lygtis (čia $v = \frac{1}{\rho}$; a, b – priklausantys nuo dujų savybių koeficientai, nustatomi iš eksperimentinių duomenų): Bertlo (Berthelot 1907)

$$\left(P + \frac{a}{\theta v^2}\right) (v - b) = \mathcal{R}\theta, \quad (3.57)$$

Diteričio (Dieterici 1899)

$$P(v - b) = \mathcal{R}e^{-\frac{a}{\mathcal{R}\theta v}}, \quad (3.58)$$

Redlichio ir Kvongo (Redlich, Kwong 1949)

$$\left(P + \frac{a}{\sqrt{\theta} v(v + b)}\right) (v - b) = \mathcal{R}\theta. \quad (3.59)$$

Energijos lygtis paprastajai termodinaminei sistemai turi pavidalą

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \theta). \quad (3.60)$$

Idealiųjų dujų vidinę energiją sudaro molekulių netvarkingo slenkamojo, sukamojo ir svyruojamojo judėjimo kinetinės energijos. Todėl vidinė vienos molekulės energija yra $e_0 = \frac{f}{2}kT$. Čia f yra sistemą sudarančio atomo ar molekulės laisvės laipsnių skaičius. Vienatomėms idealiosioms dujoms $f = 3$, o dviatomėms dujoms $f = 5$ (Fogelson, Likhachev 2004). Idealiųjų dujų vidinė energija \mathcal{E} yra lygi

$$\mathcal{E} = c_v T, \quad c_v = \frac{f}{2}\mathcal{R}. \quad (3.61)$$

Pastebėsime, kad realiųjų dujų būsenos lygčių tikslumo tyrimas lieka aktualus ir dabar.

Atlikime skirtingų dujų analizę. Sulyginkime idealias politropines dujas ir Van der Vaalso politropines dujas.

Idealiųjų politropinių dujų būsenos lygtys turi pavidalą: $P = \mathcal{R}\rho\theta$, $\mathcal{E} = c_V\theta$. Van der Vaalso politropinių dujų atveju $P = \frac{\mathcal{R}\rho\theta}{1 - \rho b} - a\rho^2$, o antroji būsenos lygtis nekeičiama $\mathcal{E} = c_V\theta$.

Kai Van der Vaalso dujose a ir b lygūs nuliui, turime idealias politropines dujas ir siekiame nustatyti, ar dėl atsiradusių papildomų koeficientų a ir b

dujose gali dingti rezonansas.

Apskaičiuojant dalines išvestines, bei narius, nuo kurių priklauso suvidurkintos sistemos koeficientai, gauname:

1) idealioms politropinėms dujoms:

$$\begin{aligned} P_{0\rho} &= \mathcal{R}\theta_0, P_{0\theta} = \mathcal{R}\rho_0, P_{0\rho\theta} = \mathcal{R}, P_{0\rho\rho} = P_{0\theta\theta} = 0, \mathcal{E}_{0\theta} = c_V, \\ \mathcal{E}_{0\rho} &= \mathcal{E}_{0\rho\rho} = \mathcal{E}_{0\rho\theta} = \mathcal{E}_{0\theta\theta} = 0, h_{211}^i = \frac{\mathcal{R}\theta_0}{\rho_0^2}, h_{213}^i = h_{233}^i = 0, h_{231}^i = -\frac{\mathcal{R}}{\rho_0}, \\ h_{312}^i &= \frac{2\mathcal{R}\theta_0}{c_V\rho_0}, h_{332}^i = \frac{\mathcal{R}}{c_V}, \lambda_0^i = \sqrt{\mathcal{R}\theta_0 \left(\frac{\mathcal{R}}{c_V} + 1 \right)}, \alpha^i = \frac{\rho_0}{\lambda_0^i}, \beta^i = \frac{\rho_0}{\theta_0}, \\ \gamma^i &= \frac{\mathcal{R}\theta_0}{c_V\lambda_0^i}, \bar{P}^i = \frac{\mathcal{R}\theta_0}{c_V}. \end{aligned}$$

2) Van der Vaalso politropinėms dujoms:

pritaikius linearizaciją, papildomus narius galima atskirti taip:

$$P^w \approx \mathcal{R}\rho\theta - a\rho^2 + \mathcal{R}\rho^2\theta b = P^i + \Delta P^w.$$

Apskaičiuojant dalines išvestines, laužtiniais skliaustais atskiriame idealiųjų dujų narių nuo Van der Vaalso papildomų koeficientų, gauname (žr. C priedą).

$$P_{0\rho}^w = P_{0\rho}^i + \Delta P_{0\rho}^w \approx [\mathcal{R}\theta_0] + [2\mathcal{R}\rho_0\theta_0 b - 2a\rho_0],$$

$$P_{0\theta}^w = P_{0\theta}^i + \Delta P_{0\theta}^w \approx [\mathcal{R}\rho_0] + [\mathcal{R}\rho_0^2 b],$$

$$P_{0\rho\theta}^w = P_{0\rho\theta}^i + \Delta P_{0\rho\theta}^w \approx [\mathcal{R}] + [2\mathcal{R}\rho_0 b],$$

$$P_{0\rho\rho}^w = \Delta P_{0\rho\rho}^w \approx [-2a + 2\mathcal{R}\theta_0 b],$$

$$P_{0\theta\theta}^w = 0, \mathcal{E}_{0\theta}^w = \mathcal{E}_{0\theta}^i = c_V, \mathcal{E}_{0\rho}^w = \mathcal{E}_{0\rho\rho}^w = \mathcal{E}_{0\rho\theta}^w = \mathcal{E}_{0\theta\theta}^w = 0.$$

Galime pastebėti, kad palyginus su idealiosiomis politropinėms dujomis, Van der Vaalso apibrėžiamose politropinėms dujose atsiranda dar viena nelygi nuliui išvestinė $P_{0\rho\rho}^w$.

Nagrinėdami (3.53) suvidurkintą lygčių sistemą, žinome, kad kai $\nu = 0$ dujose neatsiranda rezonansas ir tada turime mažos amplitudės nepriklausomas ilgąsias bangas, kurios yra periodinės ir juda su pastoviu greičiu.

Norime nustatyti, ar dujose ν gali būti lygūs nuliui.

1) Idealioms politropinėms dujoms.

Apskaičiavę (3.53) suvidurkintos sistemos koeficientus pagal (3.49) ir (3.52) formules, gauname:

$$\mu = -\frac{\mathcal{R} - 2c_v}{2c_v}, \quad \nu = -\frac{\sqrt{\mathcal{R}c_v}}{2\sqrt{\theta_0(\mathcal{R} + c_v)}}. \quad (3.62)$$

Matome, kad idealiųjų dujų atveju ν – visada yra pastovaus ženklo. Todėl galime teigti, kad jeigu pradiniu laiko momentu yra neišpildyta (3.50) sąlyga, tai idealiose dujose visada įvyksta rezonansas.

2) Tolimesniam Van der Vaalso politropinių dujų nagrinėjimui pasirenkame atskirą atvejį. Nagrinėsime realų uždavinį (Sivuhin 2012, 2013). Paimame deguonį (O_2) ir azotą (N_2).

$$\text{Deguoniui: } a = 0,136 \frac{Hm^4}{mol^2}, \quad b = 3,17 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{mol}.$$

$$\text{Azotui: } a = 0,135 \frac{Hm^4}{mol^2}, \quad b = 3,86 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{mol}.$$

Apskaičiuosime ν Van der Vaalso lygčiai pagal (3.52) formulę, gauname tokius rezultatus:

3.2 lentelė. Parametro ν reikšmės (O_2)

Table 3.2. Value of parameter ν for (O_2)

		$\rho_0, (m^{-3})$						
		11100	11250	11400	11550	11700	11852	12000
$\theta_0, (K)$	200	0,0305	0,0443	0,0580	0,0717	0,0852	0,0985	0,1116
	250	-0,0037	0,0022	0,0082	0,0142	0,0202	0,0262	0,0321
	300	-0,0100	-0,0062	-0,0024	0,0014	0,0053	0,0092	0,0130
	350	-0,0116	-0,0088	-0,0060	-0,0035	-0,0003	0,0026	0,0055
	400	-0,0120	-0,0098	-0,0075	-0,0052	-0,0029	-0,0006	0,0018
	450	-0,0119	-0,0101	-0,0082	-0,0062	-0,0043	-0,0023	-0,0003
	500	-0,0117	-0,0102	-0,0084	-0,0067	-0,0050	-0,0033	-0,0015

Skaičiavimai pateikti 3.2, 3.3 lentelėse rodo, kad ν gali būti lygus nuliui. O tai reiškia kad, Van der Vaalso dujose neatsiras rezonansas. Jis neatsiranda, pavyzdžiui, esant tokioms sąlygoms:

deguoniui: $\theta_0 = 400, \rho_0 = 11885,8; \theta_0 = 350, \rho_0 = 11715,3; \theta_0 = 300, \rho_0 = 11493,4; \theta_0 = 250, \rho_0 = 11193,5$ (3.2 lentelė);

3.3 lentelė. Parametro ν reikšmės (N_2)**Table 3.3.** Value of parameter ν for (N_2)

		$\rho_0, (m^{-3})$						
		10800	11000	11200	11400	11600	11800	12000
$\theta_0, (K)$	200	0,0029	0,0213	0,0397	0,0580	0,0762	0,0941	0,1116
	250	-0,0154	-0,0076	0,0003	0,0082	0,0162	0,0242	0,0321
	300	-0,0174	-0,0124	-0,0074	-0,0024	0,0027	0,0079	0,0130
	350	-0,0171	-0,0135	-0,0098	-0,0060	-0,0022	0,0016	0,0055
	400	-0,0165	-0,0135	-0,0105	-0,0075	-0,0044	-0,0013	0,0018
	450	-0,0157	-0,0132	-0,0107	-0,0082	-0,0056	-0,0029	-0,0003
	500	-0,0150	-0,0128	-0,0106	-0,0084	-0,0061	-0,0039	-0,0015

azotui: $\theta_0 = 400, \rho_0 = 11885,8; \theta_0 = 350, \rho_0 = 11715,3; \theta_0 = 300, \rho_0 = 11493,4; \theta_0 = 250, \rho_0 = 11193,5$ (3.3 lentelė).

3.3. Trečiojo skyriaus išvados

1. Absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesiniams svyravimams modeliuoti sudaryta suvidurkintų lygčių integralinė diferencialinė sistema. Šiai sistemai spręsti sukurtas Maple terpėje algoritmas, leidžiantis konstruoti specialaus pavidalo sprendinio artinius.
2. Nerezonansiniu atveju, uždavinį pavyksta išspręsti tiksliai, todėl tai leido atlikti programos testavimą. Nustatyta, kad konstruojamo artinio tikslumas priklauso nuo harmonikų skaičiaus ir skleidinių aproksimujančių polinomų laipsnio. Šių parametrų įtaka tiriama skaitiniais eksperimentais.
3. Sukonstruotos aproksimacinės formules, esant neapibrėžtam parametru uždavinio pradinėse sąlygose.
4. Atlikti skaičiavimai rodo stygos profilio kitimą ilgajame laiko intervale rezonansiniu ir nerezonansiniu atvejais.
5. Sukonstruota tolygiai tinkama ilgajame laiko intervale asimptotinė aproksimacija, aprašančią periodinių akustinių bangų rezonansinę sąveiką.
6. Nustatytos sąlygos, kurioms esant, Van der Vaalso dujose, palyginus su idealiomis dujomis, neatsiranda rezonansas.

Bendrosios išvados

1. Įrodyta teorema, leidžia pagrįsti vidurkinimo pagal charakteristikas metodą kvazitiesinėms hiperbolinėms sistemoms (įrodytas N. N. Bogoliubovo teoremos analogas).
2. Sukonstruoti specialaus pavidalo sprendinio artiniai, absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesiniams svyravimams modeliuoti. Atlikti skaičiavimai rodo stygos profilio kitimą ilgajame laiko intervale rezonansiniu ir nerezonansiniu atvejais.
3. Sukonstruota tolygiai tinkama ilgajame laiko intervale asimptotinė aproksimacija dujų dinamikos diferencialinėms lygtims. Nustatytos sąlygos, kurioms esant, Van der Vaalso dujose, palyginus su idealiomis dujomis, neatsiranda rezonansas.

Literatūros sąrašas

- Arora, R. 2008. Non-planar Shock Waves in a Magnetic Field. *Mathematics with applications*, 2686–2691.
- Bakhvalov, N. S.; Panasenko G.P.; Štaras A.L.; Eglit M.E. 1987. *Numerical-asymptotic methods*. Asymptotic Methods in Mathematical Physics, Naukova Dumka, Kiev.
- Bogoliubov, N. N.; Mitropolsky, Y. A. 1961. *Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations*. Hindustan Publishing Corp., Gorgon and Breach.
- Bogoliubov N. N. 1945. *O nekotrich statisticeskix metodach v matematiceskoj fizike*.
- Bulota, K.; Survila P. 1989. *Algebra ir skaičių teorija 1*, Mokslas, Vilnius.
- Belyaev, N. M. 1987. *Termodinamika*, Termodinamika. Kiev: Vysčia škola.
- Bulota, K.; Survila, P. 1989. *Algebra ir skaičių teorija 1*, Mokslas, Vilnius.
- Berthelot, D. in *Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures – Tome XIII* (Paris: Gauthier-Villars). Cituojama pagal Wikipedia: Real gas, http://en.wikipedia.org/wiki/Real_gas.
- Courant, R. 1962. *Partial differential equations*. New York-London.
- Chikwendu, S. C.; Kevorkian J. 1972. A perturbation method for hyperbolic equations with small non-linearities. *SIAM J. Appl. Math.*, 27(2): 235–258.
- Dieterici, C. Ann. (1899) Phys. Chem. Wiedemanns Ann. 69, 685. Cituojama pagal

- Wikipedia: Real gas, [http : //en.wikipedia.org/wiki/Real_gas](http://en.wikipedia.org/wiki/Real_gas).
- Eckhaus W. 1975. New approach to the asymptotic theory of non-linear oscillations and wave-propagation . *J. Math. Anal. Appl.*, 49(3): 575–611.
- Fogelson, R. L.; Likhachev E. R. 2004. Equation of State of a Real Gas. *Technical Physics*, 49(7): 935–937.
- Fichtengolcas, G. 1967. *Matematinės analizės pagrindai II*.
- Gutierrez, E. R.; Silva Dias, P. L.; Raupp, C. 2011. Asymptotic approach for the nonlinear equatorial long wave interactions. *Dynamic days South America. Journal of Physics*, 285.
- Hartman, P. 1964. *Ordinary differential equations*, Wiley, New York.
- Hunter, JK.; Keller, JB. 1988. Nonlinear hyperbolic waves. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A. (3rd ed.)*, 417: 299–308.
- Joseph M. Powers. 2013, *Lecture notes on Thermodynamics*. Notre Dame, Indiana, USA, 382 p.
- Kalyakin, L. A. 1989. Long-wave asymptotics. Integrable equations as the asymptotic limit of nonlinear system, *Uspekhi Mat. Nauk*, 44(1): 5–34; translation in Russian Math. Surveys 44(1), 3–42.
- Košliakov N. S.; Gliner B.; Smirnov M. M 1970. *Uravnenija v castnich proizvodnich matematicheskoj fiziki*.
- Krylov, N. M.; Bogoliubov N. N. 1934. *Prilozenije metodov nelinejnoj mehaniki k teoriji stacionarnich kolebanij*.
- Krylov, N. M.; Bogoliubov N. N. 1937. *Vvedenije v nelinejnuju mehaniku*, 1937.
- Krylovas, A.; Čiegis, R. 2004. A review of numerical asymptotic methods for weakly nonlinear waves, *Math. Model. Anal.*, 9(3): 209–222.
- Krylovas, A. 1983. Asymptotic integration of first-order hyperbolic systems. *Litovsk. Mat. Sb.*, 23(4): 12–17; *Lithuanian Math. J.*, 23: 362–366.
- Krylovas, A.; Čiegis, R. 2001. Approximation of Hyperbolic Weakly Nonlinear System. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 8(4): 458–470.
- Krylovas, A. 1985. Asymptotic approximation of solutions of weakly linear differential systems. *Lith Math. J.*, 25: 137–145.
- Krylovas, A. 1989. Justification of the method of internal averaging along characteristics of weakly nonlinear systems. *Lith. Math. J.*, 29(4): 721–732.
- Krylovas, A. 1990. Justification of the method of internal averaging along characteristics of weakly nonlinear systems II. *Lith. Math. J.*, 30(1): 88–100.
- Krylovas, A. 2008. Apie vidurkinimo operatoriaus aproksimaciją. *Lietuvos matema-*

tikos rinkinys, 48(49): 66–71.

Krylovas A.; Čiegis, R. 2003. Examples of asymptotical analysis of hyperbolic equations, In: *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2002. Mathematics in Industry-E CMI Subseries*, Vol.4, Springer-Verlag, Heidelberg, p. 321–326.

Krylovas A.; Čiegis, R. 2001. Asymptotical analysis of one dimensional gas dynamics equations. *Math. Model. Anal.*, 6(1):117 — 128.

Krylovas, A.; Miškinis, P. 2007. Nonlinear oscillations of the absolute elastic weightless string. Asymptotics construction, *Lith. Math. Journal*, spec. issue, (47), p. 123–127.

Krylov, A. V. 1989. Internal averaging of partial differential systems of first order. (Russian) *Mat. Zametki*, 46(6): 112–113.

Krylov, A. V. 1986. Asymptotic integration of weakly nonlinear partial differential systems. (Russian) *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* 26, 26(1): 72–79.

Krylovas, A. V.; Štaras, A. L. 1984. Asymptotic integration of weakly nonlinear systems with slowly varying coefficients. *Lith. Math. Journal*, 24, p. 125–130.

Kurihara, E.; Yano, T. 2006. Nonlinear analysis of periodic modulation in resonance of cylindrical and spherical acoustic standing waves. *Physics of Fluids*, 18.

Lancaster, P. 1969. *Theory of Matrices*, Academic Press, New York.

Maslov, V. P. 1987. *Asymptotic methods for solving pseudodifferential equations*. (Russian), Nauka Publ., Moscow.

Maslov, V. P.; Mosolov, P. P. 2000. *Equations of a one-dimensional barotropic gas*, Nauka, Moscow (in Russian).

Mitropolsky, Y.; Choma, G.; Gromak, M. 2006. *Asymptotic Methods for Investigating Equations of Hyperbolic Type.*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mitropolskij, Y.; Choma, G. 1970. O principe usrednenija dlja giperboliceskich sistem vdol charakteristik. *Ukr. mast. zurnal* 32, 600–610.

Mitropolskij, Y.; Choma, G. 1979. O metodach usrednenija chiperboliceskich sistem s bistrimi i medlennimi peremennimi., *Ukr. mast. zurnal* 31(2), 149–156.

Mitropolskij, Y.; Choma, G.; Gromak, M. 2006. *Asymptotic Methods for investigating Quasiwave Equations of Hyperbolic Type.*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mitropolskij, Y. A. 1971. *Metod usrednenija v nelinejnoj mechanike*.

Mitropolsky, Y. A.; Nguen Van Dao 2011. *Applied Asymptotic Methods in Nonlinear Oscillations*.

Mitropolskij, Y. A. 1955. *Nestacionarnie processy v nelinejnych kolebatelich sistemax*. 1955.

- Majda, A.; Rosales, R.; Schonbek, M. 1988. A canonical system of integro differential equations arising in resonant nonlinear acoustics, *Studies. Appl. Math.*, 79: 205–262.
- Miškinis, P. 2003. *Nonlinear and nonlocal integrable models*, Vilnius: Technika (in Lithuanian).
- Magnus, K. 1982 *Schwingungen*. Durchgesehene, New York.
- Nayfeh, A.; 1981. *Introduction to Perturbation Techniques*, New York Chichester Brisbane Toronto.
- Pelinovsky, D. E.; Simpson, G.; Weinstein, M. I. 2012. Polychromatic Solitary Waves in a Periodic and Nonlinear Maxwell System. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 11(1): 478–506.
- Paulauskas, V.; Golokvosčius P. 1961. *Diferencialinės lygtys*, Vilnius : Valstybinė politinės ir mokslines literatūros leidykla.
- Powers, J. M.; 2013. *Lecture notes on Thermodynamics*, Notre Dame, Indiana, USA.
- Rozhdestvenskii, B. L.; Yanenko N. N. 1978. *Systems of Quasilinear Equations and their Application to Gas Dynamics*. Nauka, Moscow.
- Redlich Otto.; Kwong J. N. S. 1949. On the Thermodynamics of Solutions. V. An Equation of State. Fugacities of Gaseous Solutions. *Chemical Reviews.*, 44(1):233–244.
- Rasteniënė, L.; Juzeliūnas, G. 2013. *Termodinamikos uždavinynas*.
- Sharma, V. D.; Srinivasan, G. K. 2005. Wave interaction in a nonequilibrium gas flow, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 40(7), p. 1031–1040.
- Samoilenko, A. M. 1987. *Elements of the Mathematical Theory of Multifrequency Oscillations*. Invariant Tori (in Russian), Moscow, Nauka.
- Simpson, G.; Weinstein, M. I. 2011. Coherent Structures and Carrier Shocks in the Nonlinear Periodic Maxwell Equation. *Multiscale Model. Simul.*, 9(3): 955–990.
- Sivuhin, D. V. 2012. *Sbornik zadach po obschemu kursu fiziki: Termodinamika i molekulyarnaya fizika*.
- Sivuhin, D. V. 2013. *Obschij kurs fiziki: Tom 2. Termodinamika i molekulyarnaya fizika*.
- Štaras, A. 1978. Asymptotic integration of weakly nonlinear partial differential equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 237:525–528, (1977); English transl. *Soviet Math. Dokl.*, 18, 1462–1466.
- Vulpe, I. M. 1982. Ob usrednenijj uravnenij v chastnich proizvodnich po nezavisimim peremennim. *Diferencialnie uravnenija*, 18(11): 1887–1893.

Autorės mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas

Recenzuojamuose mokslo žurnaluose

Krylovas, A.; Lavcel-Budko, O.; Miškinis, P. 2010. Asymptotic solutions of the mathematical model of nonlinear oscillations of absolutely elastic inextensible weightless string. *Nonlinear analysis: modelling and control*, 15(3): 307–323, ISSN 1392-5113 [ISI Web of Science].

Krylovas, A.; Lavcel-Budko, O. 2009. Absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesinių svyravimų asimptotikų tyrimas. *Lietuvos matematikos rinkinys. Lietuvos matematikų draugijos darbai / Matematikos ir informatikos institutas, Lietuvos matematikų draugija, Vilniaus universitetas*, 50: 41–46, ISSN 0132–2818.

Krylovas, A.; Lavcel-Budko, O. 2013. Vienmačio dujų dinamikos uždavinio sprendinio asimptotinis aproksimavimas *Lietuvos matematikos rinkinys. Lietuvos matematikų draugijos darbai / Matematikos ir informatikos institutas, Lietuvos matematikų draugija, Vilniaus universitetas*, 54 (B): 48–53, ISSN 0132–2818.

Krylovas, A.; Lavcel-Budko, O.; Miškinis, P. 2012. Judėjimo lygčių atskyrimas dvima-

tės gravitacinės švytuoklės modelyje. *Lietuvos matematikos rinkinys. Lietuvos matematikų draugijos darbai / Matematikos ir informatikos institutas, Lietuvos matematikų draugija, Vilniaus universitetas*, 53(B): 31–36, ISSN 0132–2818.

Krylovas, A.; Lavcel-Budko, O. 2012. Vidurkinimo išilgai hiperbolinės sistemos charakteristikų operatoriaus savybės. *Lietuvos matematikos rinkinys. Lietuvos matematikų draugijos darbai / Matematikos ir informatikos institutas, Lietuvos matematikų draugija, Vilniaus universitetas*, 53(B): 25–30, ISSN 0132–2818.

Priedai

A priedas. Algoritmas, specialaus pavidalo artiniams konstruoti

```
restart;
# Pradinės konstantos:
n := 3; m := 3; beta:=1; omega:=1; k:=1; l:=1; alpha:=0; g :=1;
# Įvedame funkcijas, kuriose nurodytos harmonikų skaičius n:
U(0, y) := U[0]+sum(U[i, c]*cos(i*y)+U[i, s]*sin(i*y), i = 1 .. n):
V(0, y) := V[0]+sum(V[i, c]*cos(i*y)+V[i, s]*sin(i*y), i = 1 .. n):
F := expand(cos(k*y-omega*t)):
E := expand(cos(l*y+omega*t)):
U0:= combine(-beta*U(0, y)*U(0, y)*(diff(U(0, y), y))):
V0:=combine(beta*V(0, y)*V(0, y)*(diff(V(0, y), y))):
U1 := expand(subs(y = y+2*t, U(0, y))):
V1 := expand(subs(y = y-2*t, V(0, y))):
u := collect(combine(U0+alpha*(int(F*(diff(V1, y)), t = 0 .. 2*Pi))/(2*Pi)-
(diff(U(0, y), y))*g*(int((V1)*V1, t = 0 .. 2*Pi))/(2*Pi)), [sin(y), sin(2*y),
sin(3*y), sin(4*y), sin(5*y), sin(6*y), cos(y), cos(2*y), cos(3*y), cos(4*y),
cos(5*y), cos(6*y)]):
v := collect(combine(V0-alpha*(int(E*(diff(U1, y)), t = 0 .. 2*Pi))/(2*Pi)+(dif-
```

```

f(V(0, y), y))*g*(int((U1)*U1, t = 0 .. 2*Pi)/(2*Pi)), [sin(y), sin(2*y),
sin(3*y), sin(4*y), sin(5*y), sin(6*y), cos(y), cos(2*y), cos(3*y), cos(4*y),
cos(5*y), cos(6*y)]):
# Surenkame reikšmes prie vienodu koeficientu:
for i to n do l[i, uc] := coeff(u, cos(i*y)) end do:
for i to n do l[i, us] := coeff(u, sin(i*y)) end do:
for i to n do l[i, vc] := coeff(v, cos(i*y)) end do:
for i to n do l[i, vs] := coeff(v, sin(i*y)) end do:
# Išskaidome visus U, V pagal Teiloro formule:
U[0] := sum(U[0, j]*tauj, j = 0 .. m):
V[0] := sum(V[0, j]*tauj, j = 0 .. m):
for i to n do U[i, c] := sum(U[i, c, j]*tauj, j = 0 .. m) end do:
for i to n do V[i, c] := sum(V[i, c, j]*tauj, j = 0 .. m) end do:
for i to n do U[i, s] := sum(U[i, s, j]*tauj, j = 0 .. m) end do:
for i to n do V[i, s] := sum(V[i, s, j]*tauj, j = 0 .. m) end do:
# Sąlygos:
to m do U[i, c, 0]:= 0 end do:
for i from 2 to m do U[i, s, 0]:= 0 end do:
for i from 2 to m do V[i, c, 0]:= 0 end do:
for i from 2 to m do V[i, s, 0]:= 0 end do:
for i from 0 to m do U[0, i]:= 0 end do:
for i from 0 to m do V[0, i]:= 0 end do:
U[1, s, 0] := 1; U[1, c, 0] := 0; V[1, s, 0] := 1; V[1, c, 0] := 0:
# Istatome į prieš tai gauta sistemą, ir gauname naują sistemą, kuriose
surenkame koeficientus prie vienodu tau:
#surenkame koeficientus prie laisvųjų narių, tau0:
for i to n do U[i, c, 1] := subs(tau = 0, l[i, uc]) end do;
for i to n do V[i, c, 1] := subs(tau = 0, l[i, vc]) end do;
for i to n do U[i, s, 1] := subs(tau = 0, l[i, us]) end do;
for i to n do V[i, s, 1] := subs(tau = 0, l[i, vs]) end do;
# Surenkame vienodus koeficientus prie laisvųjų narių, tau1:
for i to n do U[i, c, 2] := coeff(collect((1/2)*l[i, uc], [tau, tau2, tau3, tau4,
tau5]), tau) end do;
for i to n do V[i, c, 2] := coeff(collect((1/2)*l[i, vc], [tau, tau2, tau3, tau4,
tau5]), tau) end do;
for i to n do U[i, s, 2] := coeff(collect((1/2)*l[i, us], [tau, tau2, tau3, tau4,
tau5]), tau) end do;
for i to n do V[i, s, 2] := coeff(collect((1/2)*l[i, vs], [tau, tau2, tau3, tau4,
tau5]), tau) end do;

```

```

# Surenkame vienodus koeficientus prie laisvųjų narių, tau2:
for i to n do U[i, c, 3] := coeff(collect((1/3)*I[i, uc], [tau, tau, tau2, tau3, tau4,
tau5]), tau2) end do;
for i to n do U[i, s, 3] := coeff(collect((1/3)*I[i, us], [tau, tau2, tau3, tau4,
tau5]), tau2) end do;
for i to n do V[i, c, 3] := coeff(collect((1/3)*I[i, vc], [tau, tau2, tau3, tau4,
tau5]), tau2) end do;
for i to n do V[i, s, 3] := coeff(collect((1/3)*I[i, vs], [tau, tau2, tau3, tau4,
tau5]), tau2) end do;
U[0] := sum(U[0, j]*tauj, j = 0 .. m);
V[0] := sum(V[0, j]*tauj, j = 0 .. m);
for i to n do U[i, c] := sum(U[i, c, j]*tauj, j = 0 .. m) end do;
for i to n do V[i, c] := sum(V[i, c, j]*tauj, j = 0 .. m) end do;
for i to n do U[i, s] := sum(U[i, s, j]*tauj, j = 0 .. m) end do;
for i to n do V[i, s] := sum(V[i, s, j]*tauj, j = 0 .. m) end do;
lu := U[0]+U[1, c]*cos(y)+U[1, s]*sin(y)+U[2, c]*cos(2*y)+U[2,
s]*sin(2*y)+U[3, c]*cos(3*y)+U[3, s]*sin(3*y);
lv:=V[0]+V[1, c]*cos(y)+V[1, s]*sin(y)+V[2, c]*cos(2*y)+V[2,
s]*sin(2*y)+V[3, c]*cos(3*y)+V[3, s]*sin(3*y);
k0 := subs(tau = 0.0, lv);
k1 := subs(tau = 0.1, lv);
k2 := subs(tau = 0.2, lv);
k3 := subs(tau = 0.3, lv);
k4 := subs(tau = 0.4, lv);
k5 := subs(tau = 0.5, lv);
k6 := subs(tau = 0.6, lv);
k7 := subs(tau = 0.7, lv);
k8 := subs(tau = 0.8, lv);
k9 := subs(tau = 0.9, lv);
k10 := subs(tau = 1.0, lv);
l0 := subs(tau = 0.0, lu);
l1 := subs(tau = 0.1, lu);
l2 := subs(tau = 0.2, lu);
l3 := subs(tau = 0.3, lu);
l4 := subs(tau = 0.4, lu);
l5 := subs(tau = 0.5, lu);
l6 := subs(tau = 0.6, lu);
l7 := subs(tau = 0.7, lu);
l8 := subs(tau = 0.8, lu);

```

```
l9 := subs(tau = 0.9, lu);
l10 := subs(tau = 1.0, lu);
plot([k0, l0], y = 0 .. 2*Pi);
plot([k1, l1], y = 0 .. 2*Pi);
plot([k2, l2], y = 0 .. 2*Pi);
plot([k3, l3], y = 0 .. 2*Pi);
plot([k4, l4], y = 0 .. 2*Pi);
plot([k5, l5], y = 0 .. 2*Pi);
plot([k6, l6], y = 0 .. 2*Pi);
plot([k7, l7], y = 0 .. 2*Pi);
plot([k8, l8], y = 0 .. 2*Pi);
plot([k9, l9], y = 0 .. 2*Pi);
plot([k10, l10], y = 0 .. 4*Pi);
```

B priedas. Dujų dinamikos sistemos pavyzdžiai

Nagrinėjama dujų dinamikos suvidurkinta diferencialinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial \tau} - f_{111}V_1 \frac{\partial V_1}{\partial y_1} = f_{123}M_1 \left[V_2 \frac{\partial V_3}{\partial y_3} \right] + f_{132}M_1 \left[V_3 \frac{\partial V_2}{\partial y_2} \right], \\ \frac{\partial V_3}{\partial \tau} - f_{333}V_3 \frac{\partial V_3}{\partial y_3} = f_{312}M_1 \left[V_1 \frac{\partial V_2}{\partial y_2} \right] + f_{321}M_1 \left[V_2 \frac{\partial V_1}{\partial y_1} \right]. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Paimame atvejį, kai (B.1) sistemoje dešinės pusės lygios nuliui, t. y. nerezonansinį atvejį. Gauname sistemą, sudarytą iš dviejų nepriklausomų lygčių, o kadangi $f_{111} = f_{333}$, tai šitos lygtys bei jų sprendiniai sutampa.

Išnagrinėkime vieną iš lygčių:

$$u_\tau + uu_x = 0, \quad (\text{B.2})$$

su pradine sąlyga: $u(0, x) = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x)$.

Diferencialinę lygtį (B.2) galime išspręsti tiksliai, išreikšdami sprendinį neišreikštinės funkcijos pavidalu:

$$u(\tau, y) = b \cdot \sin(y - u(\tau, y)\tau) + a \cdot \cos(y - u(\tau, y)\tau). \quad (\text{B.3})$$

Funkcijos $u(\tau, y)$ išvestinė pagal τ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u(\tau, y) = - \frac{(b \cdot \cos(-y + \tau u(\tau, y)) + a \cdot \sin(-y + \tau u(\tau, y)))u(\tau, y)}{1 + \tau(b \cdot \cos(-y + \tau u(\tau, y)) + a \cdot \sin(-y + \tau u(\tau, y)))}. \quad (\text{B.4})$$

Funkcijos $u(\tau, y)$ išvestinė pagal y :

$$\frac{\partial}{\partial y} u(\tau, y) = \frac{b \cdot \cos(-y + \tau u(\tau, y)) + a \cdot \sin(-y + \tau u(\tau, y))}{1 + \tau(b \cdot \cos(-y + \tau u(\tau, y)) + a \cdot \sin(-y + \tau u(\tau, y)))}. \quad (\text{B.5})$$

Įrašius (B.3) ir (B.4) į (B.2) lygtį gauname teisingą tapatybę.

Išskleiskime funkciją $u(\tau, y)$ Teiloro formule. Pažymėję $D_j u$ funkcijos u j -tosios eilės išvestines pagal τ , gauname:

$$u(\tau, y) = \sum_{j=0}^M \frac{D_j u(0, y)}{j!} \tau^j + O(\tau^{M+1}),$$

čia

$$u(0,y) = b \sin(y) + a \cos(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u(0,y) = -\frac{1}{2} b^2 \sin(2y) - ba \cos(2y) + \frac{1}{2} a^2 \sin(2y),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} u(0,y) = & \left(-\frac{1}{4} b^3 - \frac{1}{4} ba^2\right) \sin(y) + \left(-\frac{1}{4} a^3 - \frac{1}{4} b^2 a\right) \cos(y) + \\ & \left(-\frac{9}{4} ba^2 + \frac{3}{4} b^3\right) \sin(3y) + \left(-\frac{3}{4} a^3 + \frac{9}{4} b^2 a\right) \cos(3y) \end{aligned}$$

ir t. t.

Apskaičiavę funkcijos u j -tosios eilės $D_j u$ išvestines, užrašome artinio formulę:

$$\begin{aligned} u(\tau, y) = & \left(b + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} b^3 - \frac{1}{4} ba^2\right) \tau^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{1}{8} a^4 b + \frac{1}{8} b^5 + \frac{1}{4} b^3 a^2\right) \tau^4\right) \sin(y) + \\ & \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} a^3 - \frac{1}{4} b^2 a\right) \tau^2 + a + \frac{1}{24} \left(\frac{1}{8} a^5 + \frac{1}{8} b^4 a + \frac{1}{4} b^2 a^3\right) \tau^4\right) \cos(y) + \\ & \left(\left(-\frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} a^2\right) \tau + \frac{1}{6} (b^4 - a^4) \tau^3\right) \sin(2y) + \\ & \left(\frac{1}{6} (2b^3 a + 2ba^3) \tau^3 - ba\tau\right) \cos(2y) + \dots \end{aligned}$$

Pasirinkę atskirą atvejį, kai $a = 1$, $b = 1$ gauname sprendinį:

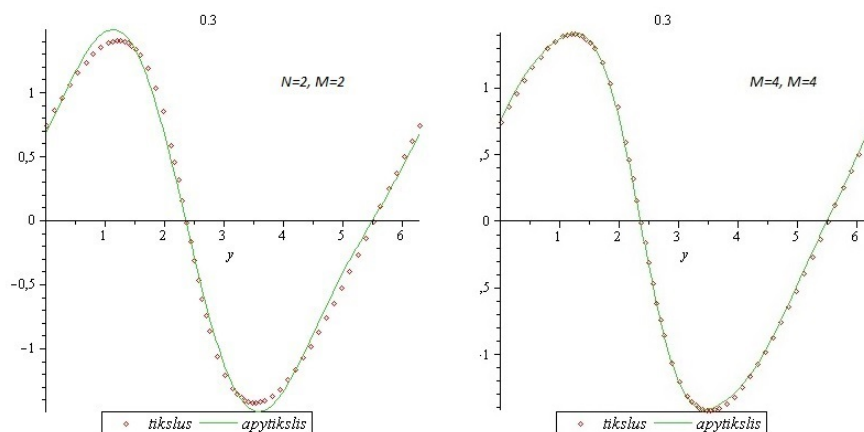
$$\begin{aligned} u(\tau, y) = & \left(1 - \frac{1}{4} \tau^2 + \frac{1}{48} \tau^4 - \frac{1}{1152} \tau^6 + \frac{1}{46080} \tau^8\right) \sin(y) + \\ & \left(1 - \frac{1}{4} \tau^2 + \frac{1}{48} \tau^4 - \frac{1}{1152} \tau^6 + \frac{1}{46080} \tau^8\right) \cos(y) + \\ & \left(-\tau + \frac{2}{3} \tau^3 - \frac{1}{6} \tau^5 + \frac{1}{45} \tau^7 - \frac{1}{540} \tau^9\right) \cos(2y) + \\ & \left(-\frac{3}{4} \tau^2 + \frac{27}{32} \tau^4 - \frac{243}{640} \tau^6 + \frac{243}{2560} \tau^8\right) \sin(3y) + \\ & \left(\frac{3}{4} \tau^2 - \frac{27}{32} \tau^4 + \frac{243}{640} \tau^6 - \frac{243}{2560} \tau^8\right) \cos(3y) + \dots \end{aligned}$$

Tą pačią (B.2) lygtį sprendėme neapibrėžtųjų koeficientų metodu. Šiuos du sprendimo budus palyginome grafiškai (B.1, B.2 pav.). Pastebėjome, kad kai τ nedidelis, reikia nedaug harmonikų, norint gauti pakankamą tikslumą, didėjant τ reikšmei, harmonikų skaičius irgi turi didėti.

B.1 lentelė. Tiksliojo ir apytikslio sprendinių paklaidas, kai $\tau = 0,3$

Table B.1. Exact and approximations errors of the solutions for $\tau = 0.3$

$\tau = 0,3$		lu-u2l	lu-u3l	lu-u4l	lu-u5l
	max pakl.	$0,113e^{-3}$	$0,415e^{-4}$	$0,171e^{-4}$	$0,714e^{-5}$
	sant. pakl. %	14,3	5,4	2,9	1,3
$\tau = 0,3$		lu-u6l	lu-u7l	lu-u8l	lu-u9l
	max pakl.	$0,338e^{-5}$	$0,29e^{-5}$	$0,683e^{-6}$	$0,606e^{-6}$
	sant. pakl. %	0,2	0,18	0,08	0,04



B.1 pav. Sprendinių grafikai

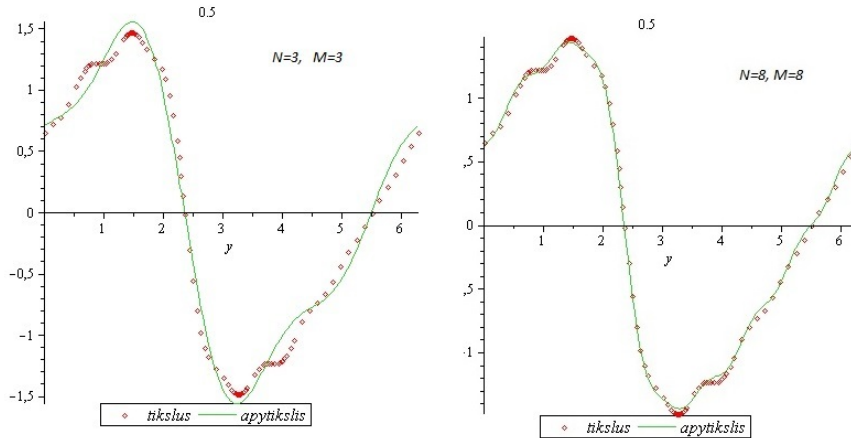
Fig. B.1. Graphic solutions

B.2 lentelė. Tiksliojo ir apytikslio sprendinių paklaidas, kai $\tau = 0,5$

Table B.2. Exact and approximations errors of the solutions for $\tau = 0.5$

$\tau = 0,5$		lu-u2l	lu-u3l	lu-u4l	lu-u5l
	max pakl.	$0,381e^{-3}$	$0,240e^{-3}$	$0,151e^{-3}$	$0,111e^{-3}$
	sant. pakl.%	40	25,7	16,2	7,6
$\tau = 0,5$		lu-u6l	lu-u7l	lu-u8l	lu-u9l
	max pakl.	$0,123e^{-3}$	$0,117e^{-3}$	$0,407e^{-4}$	$0,601e^{-4}$
	sant. pakl.%	10,1	9,7	5,7	4,9

(B.2) diferencialinei lygčiai nustatėme trūkio tašką. Jis leidžia mums nustatyti, iki kokios τ reikšmės galime konstruoti artinius (kokiam intervale



B.2 pav. Sprendinių grafikai

Fig. B.2. Graphic solutions

sprendinys turi prasmę).

Trūkis įvyksta, kad vardiklis lygus nuliui, t. y. įvyksta dalyba iš nulio.

$$1 + \tau(b \cdot \cos(-y + \tau u(\tau, y)) + a \cdot \sin(-y + \tau u(\tau, y))) = 0. \quad (\text{B.6})$$

Išnagrinėkime (B.2) lygtį:

$$u_t(t, x) + u(t, x)u_x(t, x) = 0,$$

$$u(0, x) = u_0(x).$$

Pažymėkime: $t = \alpha T$, $x = \beta X$, $u = a\tilde{u}$.

Ištačius į lygtį, gauname:

$$a\alpha\tilde{u}_T + a^2\beta\tilde{u}\tilde{u}_X = 0,$$

$$\tilde{u}(0, X) = a u_0(X).$$

Čia $a\alpha = 1$ ir $a^2\beta = 1$. Iš čia seka, kad $\alpha = 1$ ir $\beta = 1$. Tai reiškia, kad $a^2 + b^2 = 1$. Tegul $a = \cos \varphi$, o $b = \sin \varphi$.

B.3 lentelėje norime parodyti, kada įvyksta trūkis, priklausomai nuo a ir b parametru.

B.3 lentelė. Trūkio laiko momentas, priklausomai nuo a ir b

Table B.3. The moment of the breakpoint, depending on a and b

	τ
$\varphi = \frac{\pi}{3}$	1,00002
$\varphi = \frac{\pi}{4}$	1,00096
$\varphi = \frac{\pi}{6}$	1,00016
$\varphi = \frac{\pi}{2}$	1,00043
$\varphi = \frac{2\pi}{3}$	1,00111
$\varphi = \frac{3\pi}{4}$	1,00011
$\varphi = \pi$	1,000
$\varphi = \frac{5\pi}{6}$	1,000

Matome, kad jeigu yra išpildyta sąlyga $a^2 + b^2 = 1$, tai trūkis įvyksta, kai $\tau = 1$.

Paimame (B.1) sistemos rezonansinį atvejį. Išnagrinėkime sistemą:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \cos(x) \cdot v, \\ v_t + vv_x = -\cos(x) \cdot u. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Su pradinėmis sąlygomis:

$$u(0, x) = a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x), \quad v(0, x) = 0. \quad (\text{B.8})$$

Pasinaudoję Maple programos simbolinių skaičiavimų galimybėmis, kai $N = 4$, $M = 4$ gauname:

$$u(y, \tau) = U_{s1}(\tau) \sin y + U_{c1}(\tau) \cos y + U_{s2}(\tau) \sin 2y + U_{c2}(\tau) \cos 2y + U_{s3}(\tau) \sin 3y + \\ U_{c3}(\tau) \cos 3y + U_{s4}(\tau) \sin 4y + U_{c4}(\tau) \cos 4y + \dots,$$

čia

$$U_{rk}^{(\tau)} = U_{rk} + U_{rk}\tau + U_{rk}\tau^2 + U_{rk}\tau^3 + U_{rk}\tau^4 + \dots; \quad r = s, c; \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

B.4 lentelē. Funkcijas $u(y, \tau)$ koeficientu $U_{rk}^{(\tau)}$ reikšmės

Table B.4. Graph $u(y, \tau)$ value of coefficients $U_{rk}^{(\tau)}$

	τ^0	τ^1	τ^2	τ^3
U_{s1}	b		$-\frac{1}{8}a^2b - \frac{1}{8}b - \frac{1}{8}b^3$	
U_{c1}	a		$-\frac{1}{8}a - \frac{1}{8}b^2a - \frac{1}{8}a^3$	
U_{s2}		$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2$		$-\frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{6}b^4 + \frac{1}{24}b^2 - \frac{1}{6}a^4$
U_{c2}		-ab		$\frac{1}{3}b^3a + \frac{1}{6}ab + \frac{1}{3}ba^3$
U_{s3}			$-\frac{9}{8}a^2b + \frac{3}{8}b^3 - \frac{1}{8}b$	
U_{c3}			$\frac{9}{8}b^2a - \frac{1}{8}a - \frac{3}{8}a^3$	
U_{s4}				$-\frac{5}{48}a^2 - \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{3}b^4 + 2a^2b^2 + \frac{5}{48}b^2$
U_{c4}				$\frac{4}{3}ba^3 - \frac{4}{3}b^3a + \frac{5}{24}ab$

	τ^4
U_{s1}	$\frac{1}{192}b + \frac{1}{64}b^3 + \frac{1}{192}ba^4 + \frac{3}{64}a^2b + \frac{1}{192}b^5 + \frac{1}{96}b^3a^2$
U_{c1}	$\frac{5}{192}a^3 + \frac{1}{96}b^2a^3 - \frac{1}{192}b^2a + \frac{1}{192}a^5 + \frac{1}{192}a + \frac{1}{192}b^4a$
U_{s2}	
U_{c2}	
U_{s3}	$-\frac{1}{96}b^2 - \frac{5}{384}b^3 + \frac{1}{96}a^2 + \frac{1}{128}b + \frac{103}{384}a^2b + \frac{27}{64}b^3a^2 - \frac{27}{128}b^5 + \frac{81}{128}ba^4$
U_{c3}	$\frac{27}{128}a^5 - \frac{59}{384}b^2a - \frac{27}{64}b^2a^3 + \frac{49}{384}a^3 + \frac{1}{128}a - \frac{81}{128}b^4a - \frac{1}{48}ab$
U_{s4}	
U_{c4}	

$$v(y, \tau) = V_{s1}(\tau) \sin y + V_{c1}(\tau) \cos y + V_{s2}(\tau) \sin 2y + V_{c2}(\tau) \cos 2y + V_{s3}(\tau) \sin 3y + \\ V_{c3}(\tau) \cos 3y + V_{s4}(\tau) \sin 4y + V_{c4}(\tau) \cos 4y + \dots,$$

čia

$$V_{rk}^{(\tau)} = V_{rk} + V_{rk}\tau + V_{rk}\tau^2 + V_{rk}\tau^3 + V_{rk}\tau^4 + \dots; \quad r = s, c; \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

B.5 lentelė. Funkcijos $v(y, \tau)$ koeficientų $V_{rk}^{(\tau)}$ reikšmės

Table B.5. Graph $v(y, \tau)$ value of coefficients $V_{rk}^{(\tau)}$

	τ^0	τ^1	τ^2	τ^3
V_{s1}			$-\frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{8}b^2$	
V_{c1}			$\frac{1}{4}ab$	
V_{s2}		$-\frac{1}{2}b$		$\frac{5}{24}a^2b - \frac{1}{24}b^3 + \frac{1}{24}b$
V_{c2}		$-\frac{1}{2}a$		$\frac{1}{12}a^3 - \frac{1}{6}b^2a + \frac{1}{24}a$
V_{s3}			$-\frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{8}b^2$	
V_{c3}			$\frac{1}{4}ab$	
V_{s4}				$\frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{48}b - \frac{1}{16}b^3 - \frac{1}{12}b^2 + \frac{3}{16}a^2b$
V_{c4}				$\frac{1}{16}a^3 - \frac{3}{16}b^2a - \frac{1}{6}ab + \frac{1}{48}a$

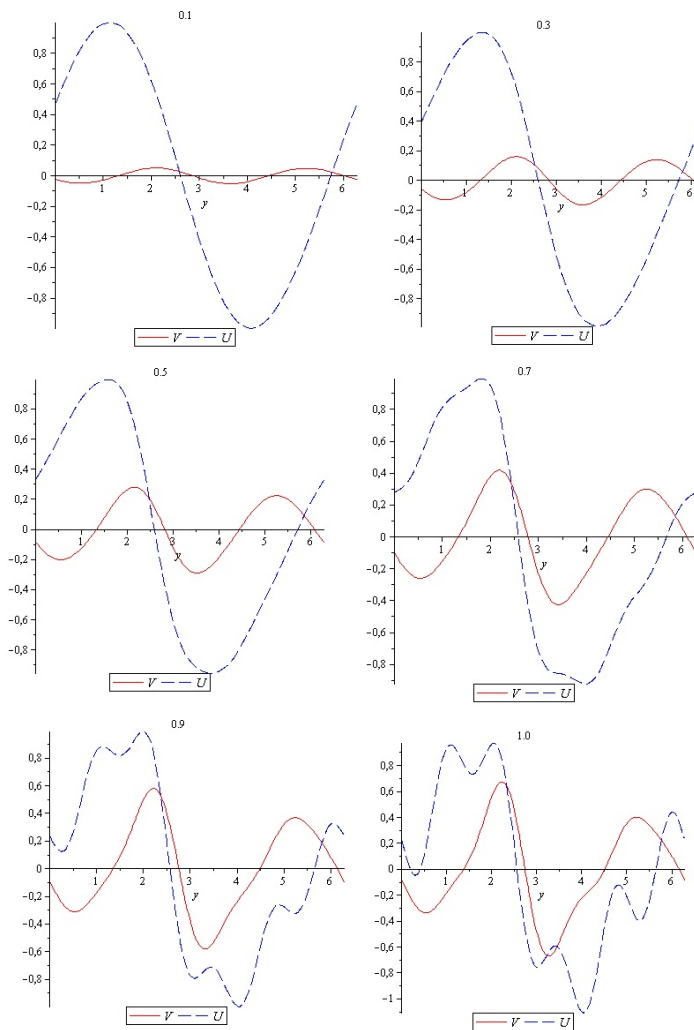
	τ^4
V_{s1}	$-\frac{1}{48}b^4 - \frac{1}{192}b^2 - \frac{1}{64}b^3 + \frac{1}{64}a^2 + \frac{1}{48}a^4 - \frac{1}{64}a^2b$
V_{c1}	$-\frac{1}{48}ab - \frac{1}{24}ba^3 - \frac{1}{24}b^3a$
V_{s2}	
V_{c2}	
V_{s3}	$\frac{11}{384}a^2 - \frac{9}{128}a^2b + \frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{7}{384}b^2 + \frac{1}{48}b^4 + \frac{3}{128}b^3$
V_{c3}	$-\frac{5}{24}ba^3 - \frac{3}{64}ab + \frac{9}{128}b^2a + \frac{1}{8}b^3a - \frac{3}{128}a^3$
V_{s4}	
V_{c4}	

Paimkime atskirą atvejį, kai $\varphi = \frac{\pi}{3}$, tada $a = \cos \frac{\pi}{3}$, $b = \sin \frac{\pi}{3}$. Polinomo laipsnis $M = 5$, harmonikų skaičius $N = 5$.

$$\begin{aligned}
 u(y, \tau) = & \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{8}\sqrt{3}\tau^2 + \frac{13}{768}\sqrt{3}\tau^4 \right) \sin(y) + \left(-\frac{187}{7680} - \frac{7}{3840}\sqrt{3} \right) \tau^5 + \frac{1}{12}\tau^3 - \frac{1}{4}\tau \sin(2y) + \left(-\frac{1}{16}\sqrt{3}\tau^2 + \left(-\frac{1}{192} + \frac{25}{768}\sqrt{3} \right) \tau^4 \right) \sin(3y) + \left(-\frac{277}{1280} - \frac{1}{480}\sqrt{3} \right) \tau^5 + \frac{7}{32}\tau^3 \sin(4y) + \\
 & \left(-\frac{31}{192}\sqrt{3} - \frac{1}{192} \right) \tau^4 \sin(5y) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\tau^2 + \frac{5}{768}\tau^4 \right) \cos(y) + \left(\frac{1}{8}\sqrt{3}\tau^3 + \left(\frac{1}{768} - \frac{43}{1536}\sqrt{3} \right) \tau^5 - \frac{1}{4}\sqrt{3}\tau \right) \cos(2y) + \left(\frac{5}{16}\tau^2 + \left(-\frac{191}{768} - \frac{1}{192}\sqrt{3} \right) \tau^4 \right) \cos(3y) + \\
 & \left(\left(\frac{1}{120} + \frac{463}{3840}\sqrt{3} \right) \tau^5 - \frac{11}{96}\sqrt{3}\tau^3 \right) \cos(4y) + \left(\frac{5}{96} - \frac{1}{192}\sqrt{3} \right) \tau^4 \cos(5y),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(y, \tau) = & \left(\frac{1}{16}\tau^2 + \left(-\frac{1}{128}\sqrt{3} - \frac{1}{96} \right) \tau^4 \right) \sin(y) + \left(-\frac{1}{4}\sqrt{3}\tau + \left(-\frac{1}{1280}\sqrt{3} + \frac{7}{1280} \right) \tau^5 + \frac{1}{32}\sqrt{3}\tau^3 \right) \sin(2y) + \left(\frac{1}{16}\tau^2 - \frac{29}{768}\tau^4 \right) \sin(3y) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{96} \sqrt{3} \right) \tau^3 + \left(\frac{1}{60} + \frac{33}{2560} \sqrt{3} \right) \tau^5 \right) \sin(4y) - \frac{7}{256} \tau^4 \sin(5y) + \\ & \left(\frac{1}{16} \sqrt{3} \tau^2 - \frac{1}{64} \sqrt{3} \tau^4 \right) \cos(y) + \left(-\frac{1}{32} \tau^3 + \left(\frac{109}{3840} + \frac{11}{3840} \sqrt{3} \right) \tau^5 - \right. \\ & \left. \frac{1}{4} \tau \right) \cos(2y) + \left(\frac{1}{16} \sqrt{3} \tau^2 + \left(\frac{3}{128} - \frac{1}{768} \sqrt{3} \right) \tau^4 \right) \cos(3y) + \left(\left(-\frac{1}{24} \sqrt{3} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{5}{96} \right) \tau^3 + \left(-\frac{1}{480} \sqrt{3} + \frac{151}{7680} \right) \tau^5 \right) \cos(4y) + \left(\frac{11}{768} \sqrt{3} + \frac{5}{128} \right) \tau^4 \cos(5y). \end{aligned}$$



B.3 pav. Funkcijų $u(y, \tau)$ ir $v(y, \tau)$ grafikai, su skirtingomis τ reikšmėmis

Fig. B.3. Graphs of $u(y, \tau)$ and $v(y, \tau)$ for different τ

C priedas. Van der Vaalso dujų koeficientai

Nagrinėsime Van der Vaalso politropines dujas. Tada $P = \frac{\mathcal{R}\rho\theta}{1 - \rho b} - a\rho^2$, o antroji būsenos lygtis nekeičiama $\mathcal{E} = c_V\theta$.

Kai a ir b lygūs nuliui, turime idealias politropines dujas, o kai a ir b maži, funkcija P skleidžiame Teiloro formule a ir b atžvilgiu:

$$P(a,b) = P(0,0) + P'_a(0,0) \cdot a + P'_b(0,0) \cdot b + O(a^2 + ab + b^2),$$

čia $P(0,0) = \mathcal{R}\rho\theta$, $P'_a(0,0) = -\frac{1}{\rho^2}$, $P'_b(0,0) = \mathcal{R}\rho^2\theta$.

Ištačius reikšmes, gauname:

$$P^w = \mathcal{R}\rho\theta - a\rho^2 + \mathcal{R}\rho^2\theta b = P^i + \Delta P^w.$$

$$P_{0\rho}^w = P_{0\rho}^i + \Delta P_{0\rho}^w = [\mathcal{R}\theta_0] + [2\mathcal{R}\rho_0\theta_0 b - 2a\rho_0],$$

$$P_{0\theta}^w = P_{0\theta}^i + \Delta P_{0\theta}^w = [\mathcal{R}\rho_0] + [\mathcal{R}\rho_0^2 b],$$

$$P_{0\rho\theta}^w = P_{0\rho\theta}^i + \Delta P_{0\rho\theta}^w = [\mathcal{R}] + [2\mathcal{R}\rho_0 b],$$

$$P_{0\rho\rho}^w = \Delta P_{0\rho\rho}^w = [-2a + 2\mathcal{R}\theta_0 b],$$

$$P_{0\theta\theta}^w = 0,$$

$$\mathcal{E}_{0\theta}^w = \mathcal{E}_{0\theta}^i = c_V,$$

$$\mathcal{E}_{0\rho}^w = \mathcal{E}_{0\rho\rho}^w = \mathcal{E}_{0\rho\theta}^w = \mathcal{E}_{0\theta\theta}^w = 0.$$

Galime pastebėti, kad palyginus su idealiosiomis politropinėmis dujomis, Van der Vaalso politropinių dujų atveju atsiranda dar viena nelygi nuliui išvestinė $P_{0\rho\rho}$.

Pažymėkime koeficientus: $h_{ljk}^w = h_{ljk}^i + \Delta_{ljk}^w(a,b)$. Pastebėkime, kad $\Delta_{ljk}^w(0,0) = 0$. (3.41) suvidurkintos sistemos koeficientai priklauso nuo šių dydžių:

$$h_{211}^w = -\frac{P_{0\rho\rho}^w}{\rho_0} + \frac{P_{0\rho}^w}{\rho_0^2} = h_{211}^i + \Delta h_{211}^w = \left[\frac{\mathcal{R}\theta_0}{\rho_0^2} \right] + [0],$$

$$\begin{aligned}
h_{213}^w &= -\frac{P_{0\rho\theta}^w}{\rho_0} + \frac{P_{0\theta}^w}{\rho_0^2} = h_{213}^i + \Delta h_{213}^w = [0] + [-\mathcal{R}b], \\
h_{231}^w &= -\frac{P_{0\rho\theta}^w}{\rho_0} = h_{231}^i + \Delta h_{231}^w = \left[-\frac{\mathcal{R}}{\rho_0}\right] + [-2\mathcal{R}b], \\
h_{233}^w &= -\frac{P_{0\theta\theta}^w}{\rho_0} = 0, \\
h_{312}^w &= \frac{P_{0\rho}^w - 2\mathcal{E}_{0\rho}^w\rho_0 - \mathcal{E}_{0\rho\rho}^w\rho_0^2}{\rho_0\mathcal{E}_{0\theta}^w} + \frac{P_0^w - \mathcal{E}_{0\rho}^w\rho_0^2}{\mathcal{E}_{0\theta}^w\rho_0^2} + \\
&\frac{P_0^w\mathcal{E}_{0\theta\rho}^w\rho_0 - \mathcal{E}_{0\rho\theta}\mathcal{E}_{0\rho}^w\rho_0^2}{\rho_0\mathcal{E}_{0\theta}^w} = \\
&= h_{312}^i + \Delta h_{312}^w = \left[\frac{2\mathcal{R}\theta_0}{\rho_0c_v}\right] + \left[\frac{-3a + 3\mathcal{R}\theta_0b}{c_v}\right], \\
h_{332}^w &= \frac{P_{0\theta}^w - 2\mathcal{E}_{0\rho\theta}^w\rho_0^2}{\rho_0\mathcal{E}_{0\theta}^w} + \frac{P_0^w\mathcal{E}_{0\theta\theta}^w - \mathcal{E}_{0\theta\theta}^w\mathcal{E}_{0\rho}^w\rho_0^2}{\rho_0\mathcal{E}_{0\theta}^w} = h_{332}^i + \Delta h_{332}^w = \\
&\left[\frac{\mathcal{R}}{c_v}\right] + \left[\frac{\mathcal{R}\rho_0b}{c_v}\right] \\
\bar{P} &= \frac{P_0^w}{c_v\rho_0} = \bar{P}^i + \Delta\bar{P}^w = \left[\frac{\mathcal{R}\theta_0}{c_v}\right] + \left[\frac{\mathcal{R}\rho_0\theta_0b - a\rho_0}{c_v}\right], \\
\lambda_0^w &= \sqrt{\frac{\bar{P}P_{0\theta}}{\rho_0} + P_{0\rho}} = \lambda_0^i + \Delta\lambda_0^w = \sqrt{\mathcal{R}\theta_0\left(\frac{\mathcal{R}}{c_v} + 1\right) +} \\
&+ \frac{\left(\bar{P}^i\Delta P_{0\theta}^w + P_{0\theta}^i\Delta\bar{P}^w + \Delta\bar{P}^w \cdot \Delta P_{0\theta}^w + \rho_0\Delta P_{0\rho}^w\right) \cdot \sqrt{\rho_0}}{2\rho_0\sqrt{\bar{P}^iP_{0\theta}^i + \rho_0P_{0\rho}^i}} = \\
&\left[\sqrt{\mathcal{R}\theta_0\left(\frac{\mathcal{R}}{c_v} + 1\right)}\right] + \left[\left(\frac{\rho_0^2(-\mathcal{R} - 2c_v)}{2c_v\sqrt{\lambda_0^i}}\right)a + \frac{\mathcal{R}\theta_0\rho_0^2(\mathcal{R} + c_v)b}{c_v\sqrt{\lambda_0^i}}\right] \\
\alpha^w &= \frac{\rho_0}{\lambda_0^w} = \alpha^i + \Delta\alpha^w = \frac{\rho_0}{\lambda_0^i} - \frac{\rho_0 \cdot \Delta\lambda_0^w}{\lambda_0^i{}^2} = \left[\frac{\rho_0}{\lambda_0^i}\right] + \left[-\Delta\lambda_0^w \cdot \frac{\rho_0}{(\lambda_0^i)^2}\right] = \\
&\left[\frac{\rho_0}{\lambda_0^i}\right] + \left[-\frac{1}{2}\frac{\rho_0^3(-\mathcal{R} - 2c_v)}{c_v(\lambda_0^i)^3}a - \frac{\rho_0^3\mathcal{R}\theta_0(\mathcal{R} + c_v)b}{c_v(\lambda_0^i)^3}\right], \\
\beta^w &= \frac{P_{0\theta}^w}{P_{0\rho}^w} = \beta^i + \Delta\beta^w = \left[\frac{\rho_0}{\theta_0}\right] + \left[\frac{2a\rho_0^2}{\mathcal{R}\theta_0^2} - \frac{\rho_0^2b}{\theta_0}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^w = \frac{\bar{P}^w}{\lambda_0^w} = \gamma^i + \Delta\gamma^w = \frac{\bar{P}^i}{\lambda_0^i} + \left(-\frac{\bar{P}^i \Delta\lambda_0^w}{\lambda_0^{i2}} + \frac{\Delta\bar{P}^w}{\lambda_0^i + \Delta\lambda_0^w} \right) = \\ \left[\frac{\mathcal{R}\theta_0}{c_v \lambda_0^i} \right] + \left[\frac{-a\rho_0}{\lambda_0^i c_v} + \frac{\mathcal{R}\rho_0\theta_0 b}{\lambda_0^i c_v} - \frac{\mathcal{R}\theta_0 \Delta\lambda_0^w}{c_v \lambda_0^{i2}} \right] = \left[\frac{\mathcal{R}\theta_0}{c_v \lambda_0^i} \right] + \\ \left[-\frac{1}{2} \frac{\rho_0 (-\mathcal{R}^2 \rho_0 \theta_0 - 2\mathcal{R}\rho_0 \theta_0 c_v + 2c_v (\lambda_0^i)^2) a}{c_v^2 (\lambda_0^i)^3} - \right. \\ \left. \frac{1}{2} \frac{\rho_0 (2\mathcal{R}^3 \rho_0 \theta_0^2 - 2\mathcal{R}\theta_0 c_v (\lambda_0^i)^2 + 2\mathcal{R}^2 \rho_0 \theta_0^2 c_v) b}{c_v^2 (\lambda_0^i)^3} \right]. \end{aligned}$$

Nagrinėjamoje suvidurkintoje sistemoje

$$\frac{\partial V_j}{\partial \tau} - \mu V_j \frac{\partial V_j}{\partial y_j} = \pm \nu M_j \left[V_2 \frac{\partial V_k}{\partial y_k} \right]$$

apskaičiuokime ν Van der Vaalso politropinems dujoms, atskirdami idealiųjų dujų narį ir Van der Vaalso politropinių dujų narį.

$$\begin{aligned} \nu = \frac{1}{2d^w} (\beta^w - d^w (h_{211}^w \alpha^w \beta^w + h_{231}^w \beta^w \gamma^w - h_{231}^w \alpha^w) + \beta^w (-\beta^w h_{321}^w + \\ h_{332}^w)) = \frac{1}{2(\alpha^w + \beta^w \gamma^w)} (\beta^w - (\alpha^w + \beta^w \gamma^w) (h_{211}^w \alpha^w \beta^w + h_{231}^w \beta^w \gamma^w - \\ h_{231}^w \alpha^w) + \beta^w (-\beta^w h_{321}^w + h_{332}^w)) = \nu^i + \Delta\nu^w = \\ = -\frac{\sqrt{\mathcal{R}c_v}}{2\sqrt{\theta_0}(\mathcal{R} + c_v)} + \left(\frac{\Delta\nu_{11}^w}{2d^i} - \frac{\Delta\nu_{11}^w \Delta d^w}{2d^{i2}} - \frac{\Delta\nu_{22}^w}{2} - \frac{\Delta\nu_{33}^w}{2} - \frac{\nu_{11}^i \Delta d^w}{2d^{i2}} \right), \end{aligned}$$

čia

$$\begin{aligned} d^w = d^i + \Delta d^w = [\alpha^i + \beta^i \gamma^i] + [\Delta\alpha^w + \Delta\beta^w \gamma^i + \beta^i \Delta\gamma^w + \Delta\beta^w \Delta\gamma^w] = \\ \left[\frac{\rho_0 (c_v + \mathcal{R})}{c_v \lambda_0^i} \right] + \\ \left[\frac{a\rho_0^2}{\lambda_0^i \theta_0 c_v} - \frac{\rho_0 \Delta\lambda_0^w (c_v + \mathcal{R})}{(\lambda_0^i)^2 c_v} \right] = \left[\frac{\rho_0 (c_v + \mathcal{R})}{c_v \lambda_0^i} \right] + \\ \left[-\frac{1}{2} \frac{\rho_0^2 (-2\rho_0 \theta_0 c_v^2 - 2(\lambda_0^i)^2 c_v - \rho_0 \theta_0 \mathcal{R}^2 - 3\rho_0 \theta_0 \mathcal{R} c_v) a}{\theta_0 (\lambda_0^i)^3 c_v^2} - \right. \\ \left. \frac{1}{2} \frac{\rho_0^2 (2\rho_0 \theta_0^2 \mathcal{R}^3 + 4\rho_0 \theta_0^2 \mathcal{R}^2 c_v + 2\rho_0 \theta_0^2 \mathcal{R} c_v^2) b}{\theta_0 (\lambda_0^i)^3 c_v^2} \right], \end{aligned}$$

$$\nu_1^w = \nu_1^i + \frac{\Delta\nu_1^w}{\nu_1^i} = \frac{[1 - h_{321}^i \beta^i + h_{332}^i]}{[-\beta^i \Delta h_{321}^w - \Delta\beta^w h_{321}^i + \Delta\beta^w \Delta h_{321}^w + \Delta h_{332}^w]} =$$

$$\begin{aligned}
& \left[1 + \frac{\mathcal{R}}{c_v} \right] + \left[\frac{\mathcal{R}\rho_0 b}{c_v} \right], \\
\nu_2^w &= \nu_2^i + \Delta\nu_2^w = [\alpha^i \beta^i] + [\beta^i \Delta\alpha^w + \Delta\beta^w \alpha^i + \Delta\beta^w \Delta\alpha^w] = \\
& \left[\frac{\rho_0^2}{\lambda_0^i \theta_0} \right] + \left[\frac{-\rho_0^2 \Delta\lambda_0^w}{\theta_0 (\lambda_0^i)^2} + \frac{2a\rho_0^3}{\mathcal{R}\theta_0^2 \lambda_0^i} - \frac{\rho_0^3 b}{\theta_0 \lambda_0^i} \right], \\
\nu_3^w &= \nu_3^i + \Delta\nu_3^w = [\gamma^i \beta^i - \alpha^i] + \\
& [\gamma^i \Delta\beta^w + \Delta\gamma^w \beta^i + \Delta\beta^w \Delta\gamma^w - \Delta\alpha^w] = \\
& \left[\frac{\rho_0 (\mathcal{R} - c_v)}{c_v \lambda_0^i} \right] + \left[\left(\frac{\rho_0^2}{\theta_0 \lambda_0^i c_v} \right) a - \frac{\rho_0 \lambda_0^w (c_v - \mathcal{R})}{(\lambda_0^i)^2 c_v} \right], \\
\nu_{11}^w &= \nu_{11}^i + \Delta\nu_{11}^w = [\beta^i \nu_1^i] + [\Delta\beta^w \nu_1^i + \beta^i \Delta\nu_1^w + \Delta\beta^w \Delta\nu_1^w] = \\
& \left[\frac{\rho_0 (c_v + \mathcal{R})}{c_v \theta_0} \right] + \left[2 \frac{\rho_0^2 (c_v + \mathcal{R}) a}{\mathcal{R}\theta_0^2 c_v} - \frac{\rho_0^2 b}{\theta_0} \right], \\
\nu_{22}^w &= \nu_{22}^i + \Delta\nu_{22}^w = [h_{211}^i \nu_2^i] + [\Delta h_{211}^w \nu_2^i + h_{211}^i \Delta\nu_2^w + \Delta h_{211}^w \Delta\nu_2^w] = \\
& \left[\frac{\mathcal{R}}{\lambda_i} \right] + \left[\frac{2a\rho_0^2}{\lambda_i \theta_0} - \frac{\mathcal{R}\Delta\lambda_0^w}{\lambda_0^i} - \frac{\mathcal{R}\rho_0 b}{\lambda_0^i} \right], \\
\nu_{33}^w &= \nu_{33}^i + \Delta\nu_{33}^w = [h_{231}^i \nu_3^i] + [\Delta h_{231}^w \nu_3^i + h_{231}^i \Delta\nu_3^w + \Delta h_{231}^w \Delta\nu_3^w] = \\
& \left[\frac{\mathcal{R} (c_v - \mathcal{R})}{c_v \lambda_0^i} \right] + \left[-\frac{\mathcal{R} a \rho_0}{\theta_0 \lambda_0^i c_v} - 2 \frac{\mathcal{R} \rho_0 (\mathcal{R} - c_v) b}{\lambda_0^i c_v} + \frac{\mathcal{R} \Delta\lambda_0^w (-\mathcal{R} - c_v)}{(\lambda_0^i)^2 c_v} \right].
\end{aligned}$$

Matome, kad idealiųjų dujų atveji ν – visada teigiamas ir nekeičia ženklų. Van der Vaalso politropinių dujų atveji gauname liekamąjį nari:

$$\begin{aligned}
\Delta\nu^w &= \frac{1}{2} \frac{\rho_0 (\mathcal{R}^3 \theta_0 - \mathcal{R}^2 \theta_0 c_v + \mathcal{R} (\lambda_0^i)^2 c_v - 2 \mathcal{R} \theta_0 c_v^2 + 2 (\lambda_0^i)^2 c_v^2) a}{\theta_0^2 c_v \lambda_0^i (c_v + \mathcal{R}) \mathcal{R}} + \\
& \frac{1}{2} \frac{\rho_0 (-\mathcal{R} \theta_0 c_v^2 + 2 \mathcal{R}^3 \theta_0 + \mathcal{R}^2 \theta_0 c_v - (\lambda_0^i)^2 c_v^2) b}{\theta_0 c_v \lambda_0^i (c_v + \mathcal{R})} + \\
& \frac{1}{2} \frac{-\mathcal{R}^2 \theta_0 \Delta\lambda_0^w c_v - \mathcal{R}^3 \theta_0 \Delta\lambda_0^w + \mathcal{R} \Delta\lambda^w (\lambda_0^i)^2 c_v + \Delta\lambda_0^w (\lambda_0^i)^2 c_v^2}{\theta_0 c_v (\lambda_0^i)^2 (c_v + \mathcal{R})} = \\
& \frac{(4 \mathcal{R}^3 \theta_0 \rho_0 - 4 \mathcal{R} \theta_0 c_v^2 \rho_0 + 4 \rho_0^2 c_v^2 - \rho^2 \mathcal{R}^2 \theta_0 c_v - 2 \rho_0^2 \mathcal{R} \theta_0 c_v^2) a}{4 \sqrt{\frac{\mathcal{R} \theta_0 (c_v + \mathcal{R})}{c_v}} \theta_0^2 c_v (c_v + \mathcal{R}) \mathcal{R}} +
\end{aligned}$$

$$\frac{(\mathcal{R}^2 \rho^2 c_v + 2 \mathcal{R}^3 \rho_0 - 2 \mathcal{R} \rho_0 c_v^2 + \mathcal{R} \rho^2 c_v^2) b}{2 \sqrt{\frac{\mathcal{R} \theta_0 (c_v + \mathcal{R})}{c_v}} c_v (c_v + \mathcal{R})}.$$

Gauname, kad $\nu^w = \left[-\frac{\sqrt{\mathcal{R} c_v}}{2 \sqrt{\theta_0 (\mathcal{R} + c_v)}} \right] +$

$$\left[\frac{(4 \mathcal{R}^3 \theta_0 \rho_0 - 4 \mathcal{R} \theta_0 c_v^2 \rho_0 + 4 \rho_0^2 c_v^2 - \rho_0^2 \mathcal{R}^2 \theta_0 c_v - 2 \rho_0^2 \mathcal{R} \theta_0 c_v^2) a}{4 \sqrt{\frac{\mathcal{R} \theta_0 (c_v + \mathcal{R})}{c_v}} \theta_0^2 c_v (c_v + \mathcal{R}) \mathcal{R}} + \frac{(\mathcal{R}^2 \rho_0^2 c_v + 2 \mathcal{R}^3 \rho_0 - 2 \mathcal{R} \rho_0 c_v^2 + \mathcal{R} \rho_0^2 c_v^2) b}{2 \sqrt{\frac{\mathcal{R} \theta_0 (c_v + \mathcal{R})}{c_v}} c_v (c_v + \mathcal{R})} \right].$$

D priedas. Paprastųjų diferencialinių lygčių su mažuoju parametru suvidurkintų sistemų analizė

Sprendžiamas klasikinis uždavinys – gravitacinė švytuoklė ant tampraus siūlo. Šis uždavinys suformuotas, tačiau nėra pilnai išspręstas K. Magnuso monografijoje (Magnus 1982). Sprendžiame dviejų antrosios eilės netiesinių diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} m\ddot{L} - mL\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi + k(L - L_0) = 0, \\ L\ddot{\varphi} + 2\dot{L}\dot{\varphi} + g \sin \varphi = 0. \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Analitiškai ši sistema neišsprendžiama, todėl paprastai nagrinėjami jos artiniai. Pavyzdžiui, įvedus naujus kintamuosius:

$$x = L - L_0 - \frac{mg}{k}, \quad L_s = L_0 + \frac{mg}{k}, \quad \omega_x^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_\psi^2 = \frac{g}{L_s}, \quad (\text{D.2})$$

(D.1) lygčių sistema pereina į sistemą:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_x^2 x = (L_s + x)\dot{\varphi}^2 - g(1 - \cos \varphi), \\ \ddot{\varphi} + \omega_\psi^2 \sin \varphi = -\frac{1}{L_s}x\ddot{\varphi} - \frac{2}{L_s}\dot{x}\dot{\varphi}. \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Bendras šios netiesinės lygčių sistemos sprendinys taip pat nežinomas, tačiau nesunku nurodyti specialų šios sistemos sprendinį, kai $\varphi = 0$. Šiuo atveju švytuoklė svyruoja tik vertikalčiai ir

$$x = A \cos(\omega_x t + \psi). \quad (\text{D.4})$$

Šį vien periodinį sprendinį galima traktuoti kaip pagrindinį svyravimą. Tačiau antras pagrindinis svyravimas randamas tik tada, kai svyravimų amplitudė maža: $|\varphi| \ll 1$. Pabandykime nedaryti šių prielaidų ir panagrinėti (D.1) sistemą bendroju atveju, atsižvelgus į tai, jog gravitacinės švytuoklės atveju pasipriešinimo jėgų nepaisome. Tai reiškia, kad pilna mechaninės sistemos energija $E = E_k + E_p$ yra pastovus dydis:

$$E = \frac{m}{2}(L^2\dot{\varphi}^2 + \dot{L}^2) + \frac{k}{2}(L - L_0)^2 + mgh. \quad (\text{D.5})$$

Čia

$$h = L_0 (1 - \cos \varphi) - (L - L_0) \cos \varphi = L_0 - L \cos \varphi \quad (\text{D.6})$$

yra pakyla virš neištemptos ilgio L_0 pakabos pusiausvyros padėties.

(D.1) judėjimo lygtyse ir (D.5) energijos išraiškoje tikslinga pereiti prie bedimensinių kintamųjų ir funkcijų:

$$l = \frac{L}{L_0}, \quad \omega_x^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_\varphi^2 = \frac{g}{L_0}, \quad \omega^2 = \frac{\omega_x^2}{\omega_\varphi^2}, \quad \tau = \omega_\varphi t. \quad (\text{D.7})$$

Tada (D.1) judėjimo lygtys ir (D.5) energijos tvermės lygties bedimensinės formos atrodo taip:

$$\begin{cases} \ddot{l} - l\dot{\varphi}^2 - \cos \varphi + \omega^2(l - 1) = 0, \\ l\ddot{\varphi} + 2\dot{l}\dot{\varphi} + \sin \varphi = 0, \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

$$\omega^2 \mathcal{E} - 2 = l^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{l}^2 + \omega^2(l - 1)^2 - 2l \cos \varphi, \quad (\text{D.9})$$

čia $\mathcal{E} = E/(kL_0^2/2)$.

2. Sprendžiame dviejų antrosios eilės netiesinių diferencialinių lygčių sistemą (D.8):

Darome prielaidą, kad nagrinėjami svyravimai turi mažą fazę φ ir švytuoklės ilgis l silpnai kinta. Atliekame pakeitimą:

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varepsilon \tilde{\varphi}(t), \quad l(t, \varepsilon) = l_0 + \varepsilon \tilde{l}(t), \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Pažymėta: ω_l – ilgio dažnis, ω_φ – svyravimo dažnis.

Gauname:

$$\begin{cases} \varepsilon \ddot{\tilde{l}} - (l_0 + \varepsilon \tilde{l}) \varepsilon^2 \dot{\tilde{\varphi}}^2 - 1 + \frac{\varepsilon^2 \tilde{\varphi}^2}{2} + \omega_l^2 l_0 + \omega_l^2 \varepsilon \tilde{l} - \omega_l^2 = 0, \\ (l_0 + \varepsilon \tilde{l}) \varepsilon \ddot{\tilde{\varphi}} + 2\varepsilon^2 \dot{\tilde{l}} \dot{\tilde{\varphi}} + \varepsilon \tilde{\varphi} = 0. \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

Perrašome (D.10) sistemą taip:

$$\begin{cases} \varepsilon \ddot{\tilde{l}} + \omega_l^2 \varepsilon \tilde{l} = \varepsilon^0 (1 - \omega_l^2 l_0 + \omega_l^2) + \varepsilon^2 (l_0 \dot{\tilde{\varphi}}^2 - \frac{\tilde{\varphi}^2}{2}), \\ l_0 \varepsilon \ddot{\tilde{\varphi}} + \varepsilon \tilde{\varphi} = \varepsilon^2 (-\tilde{l} \ddot{\tilde{\varphi}} - 2\dot{\tilde{l}} \dot{\tilde{\varphi}}). \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

Sistemos pirmoje lygtyje, narys prie ε^0 turi būti lygus 0:

$$1 - \omega_l^2 l_0 + \omega_l^2 = 0.$$

Sprendžiame (D.17) sistemą sudėties būdu, gauname:

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{1}{\omega_l} \varepsilon F_1 \sin(\omega_l t + \alpha), \\ \dot{\alpha} = -\frac{1}{a\omega_l} \varepsilon F_1 \cos(\omega_l t + \alpha), \\ \dot{b} = -\frac{1}{\omega_\varphi} \varepsilon G_1 \sin(\omega_\varphi t + \beta), \\ \dot{\beta} = -\frac{1}{b\omega_\varphi} \varepsilon G_1 \cos(\omega_\varphi t + \beta). \end{cases} \quad (\text{D.18})$$

Čia $F_1 = \frac{5}{4}b^2 \sin^2(\omega_\varphi t + \beta) - \frac{1}{2}b^2 \cos^2(\omega_\varphi t + \beta)$, o
 $G_1 = \frac{a}{l_0}(\omega_\varphi \cos(\omega_l t + \alpha) \cos(\omega_\varphi t + \beta) - 2\omega_l \sin(\omega_l t + \alpha) \sin(\omega_\varphi t + \beta))$.

Vietoje F_1 ir G_1 įrašome atitinkamus reiškinius, ir gauname sistemą:

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{b^2}{\omega_l} \varepsilon (\sin^2(\omega_\varphi t + \beta) - \frac{1}{2} \cos^2(\omega_\varphi t + \beta)) \sin(\omega_l t + \alpha), \\ \dot{\alpha} = -\frac{b^2}{a\omega_l} \varepsilon (\sin^2(\omega_\varphi t + \beta) - \frac{1}{2} \cos^2(\omega_\varphi t + \beta)) \cos(\omega_l t + \alpha), \\ \dot{b} = -\frac{ab}{l_0} \varepsilon (\omega_\varphi \cos(\omega_l t + \alpha) \cos(\omega_\varphi t + \beta) - 2\omega_l \sin(\omega_l t + \alpha) \sin(\omega_\varphi t + \beta)) \times \\ \quad \times \sin(\omega_\varphi t + \beta), \\ \dot{\beta} = -\frac{a}{l_0} \varepsilon (\omega_\varphi \cos(\omega_l t + \alpha) \cos(\omega_\varphi t + \beta) - 2\omega_l \sin(\omega_l t + \alpha) \sin(\omega_\varphi t + \beta)) \times \\ \quad \times \cos(\omega_\varphi t + \beta). \end{cases}$$

Jos ekvivalentus pavidalas yra

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{b^2}{\omega_l} \varepsilon (\frac{1}{4} \sin(2t + \alpha) - \frac{3}{8} \sin(4t + \alpha + 2\beta) - \frac{3}{8} \sin(\alpha - 2\beta)), \\ \dot{\alpha} = -\frac{b^2}{a\omega_l} \varepsilon (\frac{1}{4} \cos(2t + \alpha) - \frac{3}{8} \cos(4t + \alpha + 2\beta) - \frac{3}{8} \cos(\alpha - 2\beta)), \\ \dot{b} = -\frac{ab}{l_0} \varepsilon (-2 \sin(2t + \alpha) + \frac{5}{4} \sin(4t + \alpha + 2\beta) + \frac{3}{4} \sin(\alpha - 2\beta)), \\ \dot{\beta} = -\frac{a}{l_0} \varepsilon (\frac{1}{2} \cos(2t + \alpha) + \frac{5}{4} \cos(4t + \alpha + 2\beta) - \frac{3}{4} \cos(\alpha - 2\beta)). \end{cases}$$

Ją suvidurkiname:

$$\langle \dot{a} \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b^2}{\omega_l} \varepsilon (\frac{1}{4} \sin(2t + \alpha) - \frac{3}{8} \sin(4t + \alpha + 2\beta) - \frac{3}{8} \sin(\alpha - 2\beta)) dt = \frac{3}{16} \varepsilon b^2 \sin(\alpha - 2\beta),$$

$$\begin{aligned}
\langle \dot{\alpha} \rangle &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b^2}{a\omega_l} \varepsilon \left(\frac{1}{4} \cos(2t + \alpha) - \frac{3}{8} \cos(4t + \alpha + 2\beta) - \right. \\
&\quad \left. \frac{3}{8} \cos(\alpha - 2\beta) \right) dt = \frac{3}{16} \frac{\varepsilon b^2 \cos(\alpha - 2\beta)}{a}, \\
\langle \dot{b} \rangle &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ab}{l_0} \varepsilon (-2 \sin(2t + \alpha) + \frac{5}{4} \sin(4t + \alpha + 2\beta) + \\
&\quad \frac{3}{4} \sin(\alpha - 2\beta)) dt = -\frac{3}{4} \varepsilon ba \sin(\alpha - 2\beta), \\
\langle \dot{\beta} \rangle &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\beta} \frac{a}{l_0} \varepsilon \left(\frac{1}{2} \cos(2t + \alpha) + \frac{5}{4} \cos(4t + \alpha + 2\beta) - \right. \\
&\quad \left. \frac{3}{4} \cos(\alpha - 2\beta) \right) dt = \frac{3}{4} \varepsilon a \cos(\alpha - 2\beta).
\end{aligned}$$

Gauname rezultata:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\langle \dot{a} \rangle = \frac{3}{16} \varepsilon b^2 \sin(\alpha - 2\beta), \\
\langle \dot{\alpha} \rangle = \frac{3}{16} \frac{\varepsilon b^2 \cos(\alpha - 2\beta)}{a}, \\
\langle \dot{b} \rangle = -\frac{3}{4} \varepsilon ba \sin(\alpha - 2\beta), \\
\langle \dot{\beta} \rangle = \frac{3}{4} \varepsilon a \cos(\alpha - 2\beta).
\end{array} \right. \quad (D.19)$$

Pereiname nuo t prie lėtojo laiko $\varepsilon t = \tau$.

Suvidurkintos sistemos apytikslio sprendinio ieškosime polinomų su nepibremžtais koeficientais pavidalu:

$$\begin{aligned}
a(\tau) &= a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \dots, \\
\alpha(\tau) &= \alpha_0 + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2 + \dots, \\
b(\tau) &= b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + \dots, \\
\beta(\tau) &= \beta_0 + \beta_1\tau + \beta_2\tau^2 + \dots.
\end{aligned}$$

Paimkime pradines sąlygas: $a_0 = 1, \alpha_0 = 0, b_0 = 1, \beta_0 = 0$.

Pagal Teiloro formulę skleidžiame $\sin(\alpha - 2\beta)$ bei $\cos(\alpha - 2\beta)$

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha - 2\beta) &= \alpha - 2\beta - \frac{1}{6}(\alpha - 2\beta)^3 + \dots, \\
\cos(\alpha - 2\beta) &= 1 - \frac{1}{2}(\alpha - 2\beta)^2 + \dots.
\end{aligned}$$

Gautus skleidinius įrašome į (D.19) sistemą. Surinkinėjant reiškinius prie vienodu τ laipsnių, randame a, α, b, β .

Keisdami polinomų laipsnius, apskaičiuojame maksimalias paklaidas (D.1, D.2, D.3 lentelės)

$\max|a_j(\tau) - a_i(\tau)|, \max|b_j(\tau) - b_i(\tau)|$, čia $j = 4, 6; i = 2, 4$, bei $j > i$ ir $\max|\alpha_n(\tau) - \alpha_m(\tau)|, \max|\beta_n(\tau) - \beta_m(\tau)|$, kur $n = 3, 5; m = 1, 3$, bei $n > m$.

D.1 lentelė Sprendinių paklaidos, priklausančios nuo laiko $\tau \in [0; 1]$

Table D.1. Time errors of the solution at $\tau \in [0; 1]$

j, i	2	4	n, m	1	3
4	0,022; 0,063		3	0,015; 0,215	
6	0,021; 0,047	0,0009; 0,017	5	0,016; 0,109	0,001; 0,106

D.2 lentelė Sprendinių paklaidos, priklausančios nuo laiko $\tau \in [0; 0,8]$

Table D.2. Time errors of the solution at $\tau \in [0; 0,8]$

j, i	2	4	n, m	1	3
4	0,009; 0,026		3	0,008; 0,110	
6	0,008; 0,022	0,0002; 0,004	5	0,008; 0,075	0,0004; 0,034

D.3 lentelė Sprendinių paklaidos, priklausančios nuo laiko $\tau \in [0; 0,6]$

Table D.3. Time errors of the solution at $\tau \in [0; 0,6]$

j, i	2	4	n, m	1	3
4	0,003; 0,008		3	0,003; 0,05	
6	0,003; 0,007	0,00004; 0,0008	5	0,003; 0,004	0,00008; 0,008

Įrašę gautus a, α, b, β į (D.13), gavome dvi funkcijas:

$$\tilde{l} = \left(1 - \frac{287}{2048} \tau^2\right) \cos\left(2t + \frac{7}{32} \tau\right), \quad (\text{D.20})$$

$$\tilde{\varphi} = \left(1 + \frac{123}{256} \tau^2\right) \cos\left(t + \frac{3}{4} \tau\right).$$

Pakeitę τ į εt , gauname

$$\tilde{l}(t; \varepsilon) = \left(1 - \frac{287}{2048} \varepsilon^2 t^2\right) \cos\left(2t + \frac{7}{32} \varepsilon t\right), \quad (\text{D.21})$$

$$\tilde{\varphi}(t; \varepsilon) = \left(1 + \frac{123}{256} \varepsilon^2 t^2\right) \cos\left(t + \frac{3}{4} \varepsilon t\right).$$

Duota sistema

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{l}} + \omega_l^2 \tilde{l} = \varepsilon(l_0 \dot{\tilde{\varphi}}^2 - \frac{\tilde{\varphi}^2}{2}), \\ \ddot{\tilde{\varphi}} + \omega_\varphi^2 \tilde{\varphi} = \varepsilon(-\omega_\varphi^2 \tilde{l} \ddot{\tilde{\varphi}} - 2\omega_\varphi^2 \dot{\tilde{l}} \dot{\tilde{\varphi}}). \end{cases}$$

Išspręskime (D.12) sistemą dar ir tiesioginio skleidinio metodu. Asimptotinio sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$\tilde{l}(t; \varepsilon) = \tilde{l}_0(t) + \varepsilon \tilde{l}_1(t) + \varepsilon^2 \tilde{l}_2(t) + \dots, \quad (\text{D.22})$$

$$\tilde{\varphi}(t; \varepsilon) = \tilde{\varphi}_0(t) + \varepsilon \tilde{\varphi}_1(t) + \varepsilon^2 \tilde{\varphi}_2(t) + \dots.$$

Randame išvestines:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{l}}(t; \varepsilon) &= \dot{\tilde{l}}_0(t) + \varepsilon \dot{\tilde{l}}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{\tilde{l}}_2(t) + \dots, \\ \dot{\tilde{\varphi}}(t; \varepsilon) &= \dot{\tilde{\varphi}}_0(t) + \varepsilon \dot{\tilde{\varphi}}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{\tilde{\varphi}}_2(t) + \dots. \end{aligned}$$

Antrosios eilės išvestinės:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{l}}(t; \varepsilon) &= \ddot{\tilde{l}}_0(t) + \varepsilon \ddot{\tilde{l}}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{\tilde{l}}_2(t) + \dots, \\ \ddot{\tilde{\varphi}}(t; \varepsilon) &= \ddot{\tilde{\varphi}}_0(t) + \varepsilon \ddot{\tilde{\varphi}}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{\tilde{\varphi}}_2(t) + \dots. \end{aligned}$$

Gautus skleidinius, įrašome į (D.12) sistemą.

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{l}}_0(t) + \varepsilon \ddot{\tilde{l}}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{\tilde{l}}_2(t) + \dots + 4(\tilde{l}_0(t) + \varepsilon \tilde{l}_1(t) + \varepsilon^2 \tilde{l}_2(t) + \dots) = \\ \varepsilon(l_0(\dot{\tilde{\varphi}}_0(t) + \varepsilon \dot{\tilde{\varphi}}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{\tilde{\varphi}}_2(t) + \dots)^2 - \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}_0(t) + \varepsilon \tilde{\varphi}_1(t) + \varepsilon^2 \tilde{\varphi}_2(t) + \dots)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\varphi}}_0(t) + \varepsilon \ddot{\tilde{\varphi}}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{\tilde{\varphi}}_2(t) + \dots + \tilde{\varphi}_0(t) + \varepsilon \tilde{\varphi}_1(t) + \varepsilon^2 \tilde{\varphi}_2(t) + \dots = \\ \varepsilon((\tilde{l}_0(t) + \varepsilon \tilde{l}_1(t) + \varepsilon^2 \tilde{l}_2(t) + \dots)(\ddot{\tilde{\varphi}}_0(t) + \varepsilon \ddot{\tilde{\varphi}}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{\tilde{\varphi}}_2(t) + \dots) - 2(\dot{\tilde{\varphi}}_0(t) + \\ \varepsilon \dot{\tilde{\varphi}}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{\tilde{\varphi}}_2(t) + \dots)(\dot{\tilde{l}}_0(t) + \varepsilon \dot{\tilde{l}}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{\tilde{l}}_2(t) + \dots)). \end{aligned}$$

Prilyginame koeficientus prie vienodų ε laipsnių:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{l}}_0(t) + 4\tilde{l}_0(t) = 0, \\ \ddot{\tilde{\varphi}}_0(t) + \tilde{\varphi}_0(t) = 0. \end{cases} \quad (\text{D.23})$$

Išsprendus šią sistemą, gaunamas bendrasis sprendinys:

$$\begin{aligned} \tilde{l}_0(t) &= C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t), \\ \tilde{\varphi}_0(t) &= C_3 \sin(t) + C_4 \cos(t). \end{aligned}$$

Ištačius pradines sąlygas: $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 0, C_4 = 1$.

Gaunamas sistemos sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas:

$$\begin{cases} \tilde{l}_0(t) = \cos(2t), \\ \tilde{\varphi}_0(t) = \cos(t). \end{cases} \quad (\text{D.24})$$

Analogiškai išsprendžiame sistemą prie ε pirmajame laipsnyje:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{l}}_1(t) + 4\tilde{l}_1(t) = \frac{5}{4} (\dot{\tilde{\varphi}}_0(t))^2 - \frac{1}{2}\varphi_0^2(t), \\ \ddot{\tilde{\varphi}}_1(t) + \tilde{\varphi}_1(t) = -\dot{\tilde{l}}_0(t)(\ddot{\tilde{\varphi}}_0(t)) + 2(\dot{\tilde{\varphi}}_0(t))(\dot{\tilde{l}}_0(t)). \end{cases} \quad (\text{D.25})$$

Įrašius pradines sąlygas, gauname sistemos sprendinys:

$$\begin{cases} \tilde{l}_1(t) = \frac{3}{32} - \frac{3}{32} \cos(2t) - \frac{7}{32} \sin(2t)t, \\ \tilde{\varphi}_1(t) = \frac{5}{4} \cos(t) - \frac{5}{4} \cos(t)^3 - \frac{3}{4} \sin(t)t. \end{cases} \quad (\text{D.26})$$

Įrašius gautus (D.24), (D.26) sprendinius į skleidinį $l(\tilde{t}, \varepsilon)$, $\varphi(\tilde{t}, \varepsilon)$ gauname

$$\tilde{l}(t) = \cos(2t) + \varepsilon \left(\frac{3}{32} - \frac{3}{32} \cos(2t) - \frac{7}{32} \sin(2t)t \right), \quad (\text{D.27})$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \cos(t) + \varepsilon \left(\frac{5}{4} \cos(t) - \frac{5}{4} \cos(t)^3 - \frac{3}{4} \sin(t)t \right).$$

Palyginkime du sistemos sprendinius, gautus vidurkinimo (D.21) bei tiesioginio skleidimo (D.27) metodais. Matome, kad sprendiniai sutampa (koeficientai prie εt nario vienodi).

Olga Lavcel-Budko

NETIESINIŲ BANGŲ REZONANSINĖS SAŲVEIKOS
MATEMATINIŲ MODELIŲ TYRIMAS

Daktaro disertacija
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

THE INVESTIGATION OF RESONANT INTERACTION OF
SOME MATHEMATICAL MODEL OF NONLINEAR WAVES

Doctoral Dissertation
Physical Sciences, Mathematics (01P)

2014 11 11. 9,75 sp. l. Tiražas 20 egz.
Vilniaus Gedimino technikos universiteto leidykla „Technika“,
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, <http://leidykla.vgtu.lt>
Spausdino UAB „Baltijos kopija“,
Kareivių g. 13B, LT-019109 Vilnius