

C priedas. Kuriant globaliųjų judėjimo maršrutų planavimo algoritmą naudotų matematinių išraiškų išvedimas ir paaiškinimai

C.1. 2.1–2.8 matematinių išraiškų išvedimas ir paaiškinimas

Dubinsio metodikos taikymas planuojant judėjimo maršrutus yra paremtas veiksmų su vektoriais atlikimu. Planuojant judėjimo maršrutą, Dubinsio metodika pradedama taikyti planuojamą maršrutą aprašant navigaciniais taškais \mathbf{w}_i , \mathbf{w}_{i+1} , \mathbf{w}_{i+2} ir t. t. (C.1 pav., a dalis). Kiekvieną navigacinį tašką \mathbf{w}_i sudaro x ir y koordinatės. Planuojamą maršrutą aprašantys navigaciniai taškai yra sujungiami tiesėmis, sudarančiomis vektorius $\mathbf{w}_{i,i+1}$, $\mathbf{w}_{i+1,i+2}$ ir t. t. Navigaciniams taškams esant sujungtiems skirtingų krypčių vektoriais $\mathbf{w}_{i,i+1}$, bei $\mathbf{w}_{i+1,i+2}$, toliau ties kiekvienu tarpiniu navigaciniu tašku yra apskaičiuojami vienetiniai (krypties) vektoriai \mathbf{q}_i , \mathbf{q}_{i+1} , ir t. t., kurie išreiškia esamą ir būsimą transporto priemonės judėjimo kryptis navigacinius taškus jungiančiais vektoriais $\mathbf{w}_{i,i+1}$, $\mathbf{w}_{i+1,i+2}$ (C.2 pav., b dalis). Bendroju atveju, vienetiniai vektoriai yra apskaičiuojami naudojant išraišką:

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}, \quad (\text{C.1})$$

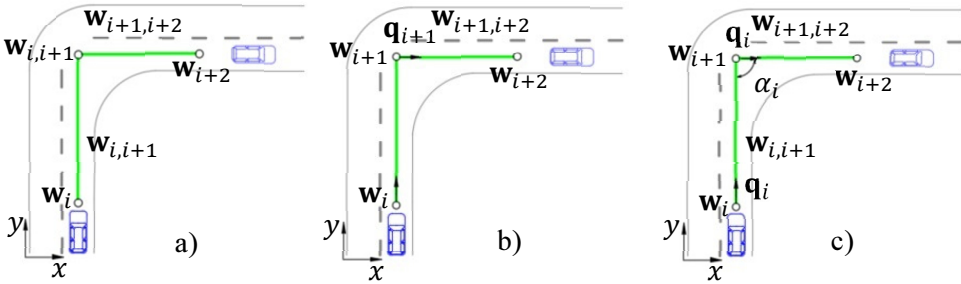
čia: $\hat{\mathbf{a}}$ – vienetinis vektorius; \mathbf{a} – vektorius, kurio vienetinis vektorius yra ieškomas; $\|\mathbf{a}\|$ – vektoriaus \mathbf{a} ilgis (norma).

Remiantis pateikta bendrąja C.1 išraiška, vienetiniai (krypties) vektoriai \mathbf{q}_i ir \mathbf{q}_{i+1} yra apskaičiuojami įvertinant planuojamo maršruto navigacinius taškus jungiančius vektorius $\mathbf{w}_{i,i+1}$ ir $\mathbf{w}_{i+1,i+2}$:

$$\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{w}_{i,i+1}}{\|\mathbf{w}_{i,i+1}\|} = \frac{\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i\|}, \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{q}_{i+1} = \frac{\mathbf{w}_{i+1,i+2}}{\|\mathbf{w}_{i+1,i+2}\|} = \frac{\mathbf{w}_{i+2} - \mathbf{w}_{i+1}}{\|\mathbf{w}_{i+2} - \mathbf{w}_{i+1}\|}, \quad (\text{C.3})$$

čia: $\mathbf{w}_{i,i+1}$ – vektorius, jungiantis navigacinius taškus \mathbf{w}_i ir \mathbf{w}_{i+1} ; $\mathbf{w}_{i+1,i+2}$ – vektorius, jungiantis navigacinius taškus \mathbf{w}_{i+1} ir \mathbf{w}_{i+2} ; \mathbf{w}_i – i -tasis judėjimo maršruto navigacinis taškas; \mathbf{w}_{i+1} – sekantis judėjimo maršruto navigacinis taškas; \mathbf{q}_i – vienetinis vektorius, nurodantis transporto priemonės judėjimo kryptį iš navigacinio taško \mathbf{w}_i į navigacinį tašką \mathbf{w}_{i+1} ; \mathbf{q}_{i+1} – vienetinis vektorius, nurodantis transporto priemonės judėjimo kryptį iš navigacinio taško \mathbf{w}_{i+1} į navigacinį tašką \mathbf{w}_{i+2} .



C.1 pav. Dubinsio metodikos taikymo pavyzdys: a) navigaciniai taškai ir navigacinius taškus jungiantys vektoriai; b) vienetiniai (krypties) vektoriai \mathbf{q}_i ir \mathbf{q}_{i+1} ; c) kampas α_i tarp vektorių

Fig. C.1. Example of the application of the Dubins approach: a) waypoints and the vectors connecting the waypoints; b) unit (direction) vectors \mathbf{q}_i and \mathbf{q}_{i+1} ; c) angle α_i between the vectors

Toliau yra apskaičiuojamas kampas α_i tarp dviejų maršruto atkarpų (vektorių $\mathbf{w}_{i,i+1}$ ir $\mathbf{w}_{i+1,i+2}$), kai judama iš navigacinio taško \mathbf{w}_i į \mathbf{w}_{i+1} bei, kai judama iš navigacinio taško \mathbf{w}_{i+1} į \mathbf{w}_{i+2} (C.1 pav., c dalis). Bendroju atveju, kampas α_i tarp dviejų vektorių gali būti apskaičiuojamas remiantis bendrąja skaliarinės vektorių sandaugos išraiška:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\alpha). \quad (\text{C.4})$$

Tuomet, remiantis bendrąja C.4 išraiška, kampas α_i tarp dviejų maršruto atkarpų, t. y. vektorių $\mathbf{w}_{i,i+1}$ ir $\mathbf{w}_{i+1,i+2}$, apskaičiuojamas:

$$\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_{i+1} = \|\mathbf{q}_i\| \|\mathbf{q}_{i+1}\| \cos(\alpha_i). \quad (\text{C.5})$$

Įvertinus, kad vektoriai \mathbf{q}_i ir \mathbf{q}_{i+1} yra vienetiniai vektoriai, kurių ilgiai yra lygūs 1, gaunama:

$$\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_{i+1} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha_i). \quad (\text{C.6})$$

Bendroju atveju, naudojant matricų daugybą bei priimant, kad vektoriai yra vienmatės matricos, skaliarinė vektorių sandauga išreiškiama:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}. \quad (\text{C.7})$$

Atsižvelgiant į bendrąją C.7 išraišką, patikslinama C.6 išraiška:

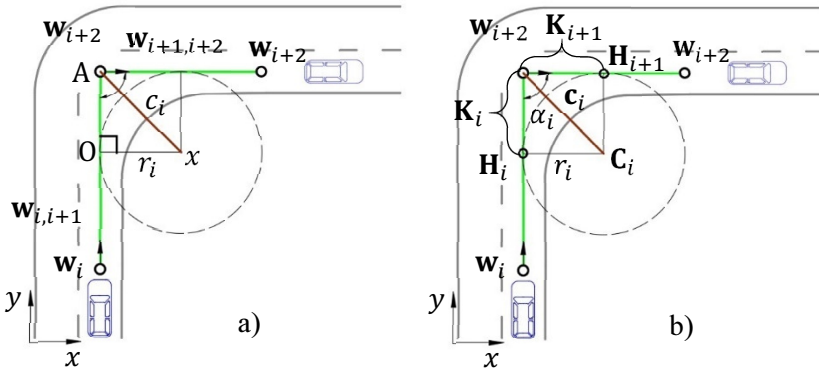
$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_{i+1} = \cos(\alpha_i). \quad (\text{C.8})$$

Pertvarkius C.8 išraišką ir išreiškus kampą α_i tarp dviejų maršruto atkarpų, t. y. vektorių $\mathbf{w}_{i,i+1}$ ir $\mathbf{w}_{i+1,i+2}$, gaunama:

$$\alpha_i = \cos^{-1}(\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_{i+1}). \tag{C.9}$$

Toliau turi būti apskaičiuojami vektoriai \mathbf{K}_i ir \mathbf{K}_{i+1} , kurie vektorių $\mathbf{w}_{i,i+1}$ ir $\mathbf{w}_{i+1,i+2}$ kryptimis išreiškia atstumus nuo navigacinio taško \mathbf{w}_{i+1} iki judėjimo apskritimine kreive pradžios ir pabaigos taškų (C.2, b dalis). Norint išreikšti vektorius \mathbf{K}_i ir \mathbf{K}_{i+1} , pirmiausiai yra reikalinga apskaičiuoti atstumo K_i reikšmę. Atstumo K_i skaičiavimas yra atliekamas remiantis schema, pateikta paveiksle (C.2, a dalis). (C.2) paveikslo a dalyje, pateiktoje schemoje matoma, kad trikampis $\triangle OAB$, kurį sudaro Dubinsio apskritiminės kreivės spindulys r_i (statinys), atstumas K_i (statinys) ir įžambinė c_i , yra statusis. Kadangi trikampis $\triangle OAB$ yra statusis, šio trikampio įžambinė kampą α_i tarp dviejų maršruto atkarpų (vektorių $\mathbf{w}_{i,i+1}$ ir $\mathbf{w}_{i+1,i+2}$) dalina pusiau (C.2 pav., a dalis). Tai reiškia, kad atstumas K_i gali būti išreikštas iš trigonometrinės funkcijos:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) = \frac{K_i}{r_i}. \tag{C.10}$$



C.2 pav. Dubinsio metodikos taikymo pavyzdys: a) trikampio $\triangle OAB$ schema; b) Dubinsio apskritiminė kreivė

Fig. C.2 . Example of the application of the Dubins approach: a) scheme of the triangle $\triangle OAB$; b) Dubins circle

Pertvarkius trigonometrinę funkciją (C.10) ir išreiškus atstumą K_i , gaunama:

$$K_i = \frac{r_i}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)}. \quad (\text{C.11})$$

Atstumas K_i yra skaliaras, o dydžiai \mathbf{K}_i ir \mathbf{K}_{i+1} , kurie vektorių $\mathbf{w}_{i,i+1}$ ir $\mathbf{w}_{i+1,i+2}$ kryptimis išreiškia atstumus nuo navigacinio taško \mathbf{w}_{i+1} iki judėjimo apskritimine kreive pradžios ir pabaigos taškų (C.2 pav., b dalis), yra vektoriai, todėl dydžiai \mathbf{K}_i ir \mathbf{K}_{i+1} yra apskaičiuojami sudauginant skaliarą K_i su vienetiniais (krypties) vektoriais \mathbf{q}_i ir \mathbf{q}_{i+1} :

$$\mathbf{K}_i = \left(\frac{r_i}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}} \right) \mathbf{q}_i, \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{K}_{i+1} = \left(\frac{r_i}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}} \right) \mathbf{q}_{i+1}. \quad (\text{C.13})$$

Kadangi Dubinso apskritiminės kreivės spindulys yra r_i pastovaus dydžio, o atstumo K_i reikšmė yra apskaičiuota remiantis trikampiu $\triangle OAB$, tuomet taško \mathbf{H}_i koordinatės (C.2 pav., b dalis), kuriame turi prasidėti judėjimas apskritimine kreive, yra apskaičiuojamos iš taško \mathbf{w}_{i+1} atimant apskaičiuotas \mathbf{K}_i reikšmes:

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{K}_i. \quad (\text{C.14})$$

Atitinkamai, taško \mathbf{H}_{i+1} koordinatės (C.2 pav., b dalis), kuriame turi pasibaigti judėjimas apskritimine kreive, yra apskaičiuojamos prie taško \mathbf{w}_{i+1} pridant apskaičiuotas \mathbf{K}_{i+1} reikšmes:

$$\mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{w}_{i+1} + \mathbf{K}_{i+1}. \quad (\text{C.15})$$

Siekiant apskaičiuoti Dubinso apskritiminės kreivės centro koordinatės, pirmaisiai yra reikalinga apskaičiuoti trikampio $\triangle OAB$ įžambinės c_i ilgį (C.2 pav., a dalis). Trikampio $\triangle OAB$ įžambinės c_i ilgis gali būti apskaičiuotas iš trigonometrinės funkcijos:

$$\sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) = \frac{r_i}{c_i}. \quad (\text{C.16})$$

Trikampio $\triangle OAB$ įžambinės c_i ilgis apskaičiuojamas:

$$c_i = \frac{r_i}{\sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)}. \quad (\text{C.17})$$

Nustačius trikampio $\triangle OAB$ įžambinės c_i ilgį, toliau yra išreiškiamas vektorius \mathbf{c}_i , esantis tarp vektorių $\mathbf{w}_{i,i+1}$ ir $\mathbf{w}_{i+1,i+2}$ (C.2 pav., b dalis). Vektoriumi \mathbf{c}_i išreikšti yra įvertinamos vektorių $\mathbf{w}_{i,i+1}$ ir $\mathbf{w}_{i+1,i+2}$ kryptys (vienetiniai (krypčių) vektoriai \mathbf{q}_i ir \mathbf{q}_{i+1}) bei $\triangle OAB$ įžambinės c_i ilgis:

$$\mathbf{c}_i = \left(\frac{r_i}{\sin\frac{\alpha_i}{2}} \right) \frac{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i+1}}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i+1}\|}. \quad (\text{C.18})$$

Tuomet Dubinso apskritiminės kreivės centro \mathbf{C}_i koordinatės yra apskaičiuojamos iš navigacinio taško \mathbf{w}_{i+1} atimant apskaičiuotas $\triangle OAB$ įžambinės vektoriaus \mathbf{c}_i reikšmes:

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{w}_{i+1} - \left(\frac{r_i}{\sin\frac{\alpha_i}{2}} \right) \frac{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i+1}}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i+1}\|}. \quad (\text{C.19})$$

C.2. 2.10–2.12 matematinų išraiškų išvedimas ir paaiškinimas

Planuojant globalųjį judėjimo maršrutą ir siekiant optimizuoti Dubinso apskritiminės kreivės spindulį r_i , yra sprendžiamas optimizavimo uždavinys. Sprendžiamo optimizavimo uždavinio tikslo funkcija:

$$\min f = \sum (x_O - x_D)^2 + \sum (y_O - y_D)^2 + \sum (\psi_O - \psi_D)^2. \quad (\text{C.20})$$

Siekiant sudarytoje tikslo funkcijoje įvertinti Dubinso apskritiminės kreivės spindulį r_i yra naudojamas transporto priemonės kinematinis modelis. Naudojant transporto priemonės kinematinį modelį pirmiausiai yra taikoma sukimosi apie vertikaliąją ašį kampinio greičio išraiška:

$$\dot{\psi}_O = \frac{v \cdot \cos(\beta)}{L} \cdot \text{tg}(\delta). \quad (\text{C.21})$$

Transporto priemonės posūkio kampas apie vertikalią ašį ψ_O yra išreiškiamas sprendžiant apibrėžtinį integralą – integruojant C.21 išraišką:

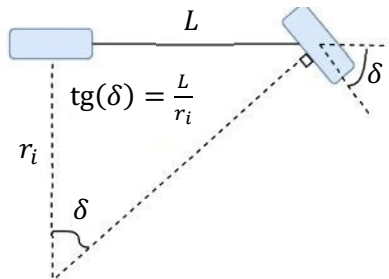
$$\psi_O = \int_0^t \left(\frac{v \cdot \cos(\beta)}{L} \cdot \operatorname{tg}(\delta) \right) dt = \frac{v \cdot \operatorname{tg}(\delta) \cdot t}{L \sqrt{1 + \frac{l_g^2 \cdot \operatorname{tg}(\delta)^2}{L^2}}}. \quad (\text{C.22})$$

Išreiškus transporto priemonės posūkio kampą apie vertikalią ašį ψ_O Dubinsio apskritiminės kreivės spindulys r_i vis dar nebus įvertintas optimizavimo uždavinio tikslo funkcijoje. Dėl šios priežasties taip pat yra reikalinga išreikšti ir transporto priemonės vairuojamųjų ratų pasukimo kampą δ . Transporto priemonės vairuojamųjų ratų pasukimo kampas δ gali būti išreiškiamas, kaip trigonometrinė funkcija remiantis transporto priemonės kinematinio modeliu (C.3 pav.):

$$\operatorname{tg}(\delta) = \frac{L}{r_i}. \quad (\text{C.23})$$

Atitinkamai, išreiškus vairuojamųjų ratų pasukimo kampą gaunama:

$$\delta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{L}{r_i} \right). \quad (\text{C.24})$$



C.3 pav. Supaprastinta transporto priemonės kinematinio modelio schema, kuria remiantis vairuojamųjų ratų pasukimo kampas yra išreiškiamas, kaip trigonometrinė funkcija

Fig. C.3. Simplified scheme of a vehicle's kinematic model, based on which the steering angle of the steering wheels is expressed as a trigonometric function

C.22 formulė yra pertvarkoma panaudojant ratų pasukimo kampo trigonometrinę C.24 išraišką:

$$\psi_O = \frac{v \cdot \operatorname{tg} \left(\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{L}{r_i} \right) \right) \cdot t}{L \sqrt{1 + \frac{l_g^2 \cdot \operatorname{tg} \left(\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{L}{r_i} \right) \right)^2}{L^2}}}. \quad (\text{C.25})$$

C.25 išraiškoje įvertinus optimizuojamą parametρά – Dubinso apskritiminės kreivės spindulį r_i , galiausiai yra pertvarkoma optimizavimo uždavinio tikslo funkcija C.20. Optimizavimo uždavinio tikslo funkcija yra pertvarkoma vietoje transporto priemonės posūkio kampo apie vertikalią ašį ψ_O įstatant gautąją C.25 išraišką ir tokiu būdu optimizavimo uždavinio tikslo funkcijoje įvertinant optimizuojamą parametρά – Dubinso apskritiminės kreivės spindulį r_i :

$$\min f = \sum (x_O - x_D)^2 + \sum (y_O - y_D)^2 + \sum \left(\frac{v_i \cdot \operatorname{tg} \left(\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{L}{r_i} \right) \right) \cdot t}{L \sqrt{1 + \frac{l_g^2 \cdot \operatorname{tg} \left(\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{L}{r_i} \right) \right)^2}{L^2}}} - \psi_D \right)^2. \quad (\text{C.26})$$

C.3. 2.15–2.16 matematinių išraiškų išvedimas ir paaiškinimas

Sudarant sprendžiamo optimizavimo uždavinio apribojimus siekiama užtikrinti, kad planuojamas maršrutas būtų saugus ir techniškai įveikiamas. Dėl šios priežasties darbe buvo priimtos ir analizuojamos dvi skirtingos prielaidos:

1. Optimizavus Dubinso apskritiminės kreivės spindulį r_i , vektorių \mathbf{K}_i ir \mathbf{K}_{i+1} ilgiai negali būti mažesni, nei pusė atkarpos q_{iS} ilgio:

$$\|\mathbf{K}_i\| - \frac{q_{iS}}{2} \leq 0. \quad (\text{C.27})$$

Tuomet:

$$\sqrt{K_i(x)^2 + K_i(y)^2} - \frac{q_{iS}}{2} \leq 0. \quad (\text{C.28})$$

čia: $K_i(x)$ ir $K_i(y)$ – atitinkamai, vektoriaus \mathbf{K}_i koordinatės x ir y .

Remiantis anksčiau aprašyta Dubinsio metodika, vektorius \mathbf{K}_i yra apskaičiuojamas:

$$\mathbf{K}_i = \begin{pmatrix} r_i \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} \end{pmatrix} \mathbf{q}_i, \quad (\text{C.29})$$

Remiantis C.29 išraiška, vektorių \mathbf{K}_i koordinatės x ir y gali būti apskaičiuojamos įvertinus vienetinio vektorių \mathbf{q}_i koordinatės x ir y :

$$K_i(x) = \begin{pmatrix} r_i \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} \end{pmatrix} q_i(x), \quad (\text{C.30})$$

$$K_i(y) = \begin{pmatrix} r_i \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} \end{pmatrix} q_i(y). \quad (\text{C.31})$$

Apibendrinus C.28, C.30 ir C.31 išraiškas gaunama:

$$\sqrt{\left(\begin{pmatrix} r_i \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} \end{pmatrix} q_i(x) \right)^2 + \left(\begin{pmatrix} r_i \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} \end{pmatrix} q_i(y) \right)^2} - \frac{q_{iS}}{2} \leq 0. \quad (\text{C.32})$$

Pertvarkius C.32 išraišką gaunama:

$$\sqrt{\frac{r_i^2 \cdot q_i(x)^2 + r_i^2 \cdot q_i(y)^2}{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\alpha_i}{2} \right)}} - \frac{q_{iS}}{2} \leq 0. \quad (\text{C.33})$$

Tuomet, atlikus veiksmus, gaunama:

$$\frac{\sqrt{r_i^2 \cdot q_i(x)^2 + r_i^2 \cdot q_i(y)^2}}{\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_i}{2} \right)} - \frac{q_{iS}}{2} \leq 0. \quad (\text{C.34})$$

2. Optimizavus Dubinsio apskritiminės kreivės spindulį r_i , vektorių \mathbf{K}_i ir \mathbf{K}_{i+1} ilgiai gali būti mažesni, nei pusė atkarpos q_{i_s} ilgio. Formuluoiant antrąjį apribojimą papildomai yra įvertinamas atstumas S_ω , kurį nuvažiuoja transporto priemonė, iki kol vairuojamieji ratai iš neutralios padėties pasiekia numatytą vairuojamųjų ratų pasukimo kampą δ , t. y. įvertinamas transporto priemonės vairaračio pasukimo kampinis greitis ω_{i_s} . Tuomet:

$$\|\mathbf{K}_i\| - \left(\frac{q_{i_s}}{2} - S_\omega \right) \leq 0. \quad (\text{C.35})$$

C.35 išraiška yra pertvarkoma atstumą S_ω išreiškus, kaip judėjimo laiko t_ω , reikalingo transporto priemonės vairuojamųjų ratų pasukimo kampui iš neutralios padėties pasiektąjį kampą δ , ir transporto priemonės judėjimo greičio v_i sandaugą:

$$\|\mathbf{K}_i\| - \left(\frac{q_{i_s}}{2} - (t_\omega \cdot v_i) \right) \leq 0. \quad (\text{C.36})$$

Bendroju atveju kampinis greitis yra gali būti išreiškiamas:

$$\omega_{i_s} = \frac{\delta}{t_\omega}. \quad (\text{C.37})$$

Svarbu atkreipti dėmesį į tai, kad C.37 išraiškoje yra įvertinamas vairuojamųjų ratų pasukimo kampas δ , o ne transporto priemonės vairaračio pasukimo kampas. Norint apskaičiuoti transporto priemonės vairaračio pasukimo kampinį greitį, C.37 išraiškoje papildomai yra įvertinamas transporto priemonės vairavimo sistemos perdavimo skaičius i_V :

$$\omega_{i_s} = \frac{\delta \cdot i_V}{t_\omega}. \quad (\text{C.38})$$

Vairuojamųjų ratų pasukimo kampą δ išreiškus, kaip trigonometrinę funkciją (C.24 išraiška) bei apibendrinus C.36 ir C.38, gaunama:

$$\|\mathbf{K}_i\| - \left(\frac{q_{i_s}}{2} - \frac{\text{tg}^{-1}\left(\frac{L}{r_i}\right) \cdot v_i \cdot i_V}{\omega_{i_s}} \right) \leq 0. \quad (\text{C.39})$$

Apibendrinus C.34 ir C.39 išraiškas, gaunama:

$$\sqrt{\frac{r_i^2 \cdot q_i(x)^2 + r_i^2 \cdot q_i(y)^2}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)^2}} - \left(\frac{q_{i_s}}{2} - \frac{\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{L}{r_i}\right) \cdot v_i \cdot i_V}{\omega_{i_s}} \right) \leq 0, \quad (\text{C.40})$$

$$\frac{\sqrt{r_i^2 \cdot q_i(x)^2 + r_i^2 \cdot q_i(y)^2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)} - \left(\frac{q_{i_s}}{2} - \frac{\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{L}{r_i}\right) \cdot v_i \cdot i_V}{\omega_{i_s}} \right) \leq 0. \quad (\text{C.41})$$