Liet. matem. rink, **47**, *spec. nr.*, 2007, 457–460

Heterogeninės sijos, apkrautos lenkimo momentu nekolineariu skerspjūvio svarbiausioms kryptims, įtempių lauko skaičiavimo metodas

Vytautas KLEIZA (KTU), Jonas KLEIZA (VGTU)
el. paštas: vytautas.kleiza@ktl.mii.lt, kleiza@mail.tele2.lt

Šio darbo tikslas pateikti naują, tamprumo ribose deformuojamos heterogeninės sijos (HS), normaliųjų įtempių pasiskirstymo skaičiavimo metodą, įgalinantį ištirti įtempių skaliarinio lauko evoliuciją kintant sijos skerspjūvio formai ir heterogeniškumo laipsniui.

Tegul HS sudaryta iš n išilginių sluoksnių, kurių tamprumo moduliai $E_1, E_2, \ldots, E_n$, o jų šoniniai paviršiai cilindriniai ir visų sluoksnių sudaromosios kolinearios (transversalusis heterogeniškumas). Sluoksnių skerspjūviai, užima susietas sritis K_i ir

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i, \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \quad i \neq j, \tag{1}$$

tada HS standžio centro koordinates, neutraliųjų sluoksnių kryptis ir ekstremalias standumo lenkimui vertes galima išreikšti per inercijos tenzoriaus savitąsias kryptis bei savitąsias vertes. HS ašinio standžio tankį apibrėšime dalimis pastovia funkcija

$$E(x, y) = \sum_{i=1}^{n} E_i \operatorname{Ind}_i(x, y), \tag{2}$$

čia $\operatorname{Ind}_i(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin K_i \\ 1, & (x, y) \in K_i \end{cases}$ – aibės indikatorinė funkcija. Tegul $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$, tada, atsižvelgdami į (2), apibrėšime skaičius

$$m_{pq}(\mathbf{E}) = \iint_K x^p y^q E(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{3}$$

per kuriuos išreikšime normaliuosius įtempius atsirandančius HS skerspjūvyje. Visų eilių momentų, standžio centro koordinačių, ašinio bei lenkimo standžių skaičiavimo formulės gautos darbe [1]. Įrodytas

1 *teiginys*. Jei HS skerspjūvį veikia lenkimo momentas **M** nekolinearus svarbiausioms inercijos tenzoriaus kryptims (įstrižasis lenkimas), o jo veikimo plokštumos

pėdsakas eina per standžio centrą (grynasis lenkimas), tai normalieji įtempiai kiekviename HS skerspjūvio taške $P(x, y) \in K$:

$$\sigma(x, y) = E(x, y)(\mathbf{M}, \mathbf{r}(x, y)), \tag{4}$$

čia x ir y taško P koordinatės globalioje koordinačių sistemoje (GKS), $\mathbf{M} = (M_{x_{cs}}\ M_{y_{cs}})$ – $M_{x_{cs}}$ ir $M_{y_{cs}}$ lenkimo momento vektoriaus dedamosios svarbiausioje centrinėje koordinačių sistemoje (SCKS), $\mathbf{r}(x, y) = (x_{cp}/m_{02}(\mathbf{E})\ y_{cp}/m_{20}(\mathbf{E}))$, x_{cp} ir y_{cp} – taško (x, y) koordinatės SCKS, $J_1 = m_{20}(\mathbf{E})$ir $J_2 = m_{02}(\mathbf{E})$ – inercijos momentai SCKS ašių atžvilgiu.

Gauta išraiška (4) pilnai nusako skaliarinį normaliųjų įtempių lauką $\sigma(x, y)$, $(x, y) \in K$ ir įgalina nustatyti jo struktūrą. Tegul α – kampas tarp GKS ir SCKS ašių, o θ – kampas tarp SCKS x – ų ašies ir lenkimo momento vektoriaus $\mathbf{M}$, tada, atsižvelgiant į tai, kad normaliųjų įtempių skaliarinio lauko gradientas kiekvienoje srityje K_i yra pastovus ir lygus

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}_{K_i}\sigma(x, y) = ME_i\Bigg[&\Big(\frac{\cos\theta\tan\alpha}{J_1\sqrt{1+\tan^2\alpha}} + \frac{\sin\theta\cot\alpha}{J_2\sqrt{1+\cot^2\alpha}}\Big)\mathbf{i}\\ &+\Big(\frac{-\cos\theta}{J_1\sqrt{1+\tan^2\alpha}} + \frac{\sin\theta}{J_2\sqrt{1+\cot^2\alpha}}\Big)\mathbf{j}\Bigg].\end{aligned}$$

Įrodytas

2 *teiginys*. Kiekvienoje srityje K_i (t.y. kiekvieno sluoksnio ribose) normaliųjų įtempių skaliarinio lauko lygio linijos yra tiesės, o funkcija $\sigma(x, y)$ dalimis tiesinė srityje K (galimi tik baigtiniai trūkiai, esantys tik sričių K_i kontūruose).

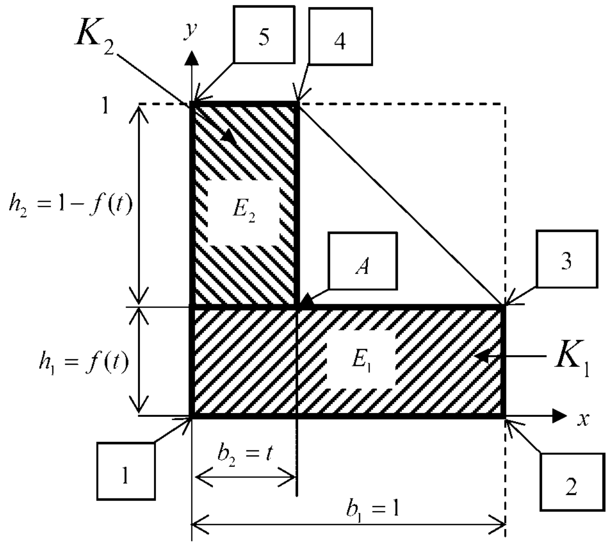
Žemiau pateikiame skaičiavimo pavyzdį ir gautų rezultatų palyginimą su kitu skaičiavimo metodu [2]. Tai dviejų sluoksnių $(E_1 \neq E_2)$ konstrukcinis elementas sudarytas iš dviejų stačiakampių, turinčių bendrą kontūro dalį (1 pav.). Pateiksime skaičiavimo rezultatus, kai konstrukcinis elementas formuojamas taškui A judant parabole $f(t) = t^2$ Šiuo atveju, tiriamas objektas – dviejų sluoksnių kampuotis tenkinantis sąlygą (1) ir

$$n = 2,\ E_1 = 1.12,\ E_2 = 1,\ K_1 = [0, 1] \times [0, t^2],\ K_2 = [0, t] \times [t^2, 1],\ t \in [0, 1]. \tag{5}$$

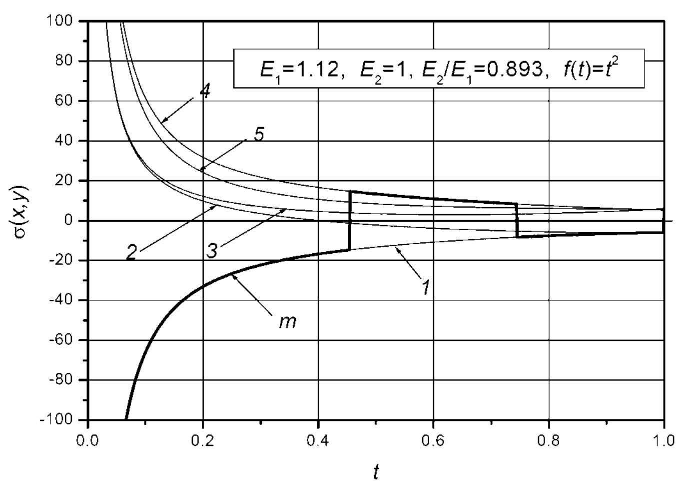
Maksimalūs normalieji įtempiai (absoliutine verte) gali atsirasti tik sijos skerspjūvio iškiliojo apvalkalo kraštiniuose taškuose (1 pav. taškai 1 – 5), todėl (konstrukcijos stiprumo aspektu) svarbus tik pastarųjų tyrimas. 2 pav. pateiktos skaičiuotos šių įtempių vertės (veikiant pastoviam lenkimo momentui $\mathbf{M}$, kolineariam GKS x-ų ašiai).

Modelio adekvatumas nustatytas lyginant pateiktus skaičiavimo rezultatus su gautais darbe [2].

Rezultatai sutapo, nes siūlomo skaičiavimo algoritmo paklaidą apsprendžia tik tikslumas, kuriuo skaičiuojami integralai (3) (pateiktame pavyzdyje pastariesiems gautos analitinės išraiškos).



1 pav. Dviejų sluoksnių sijos skerspjūvio geometrija.



2 pav. Normaliųjų įtempių evoliucija sijos skerspjūvio iškiliojo apvalko kraštiniuose taškuose (kreivės $1-5$), kintant formos parametrui t. Maksimalieji įtempiai sijos skerspjūvyje (kreivė m).

Literatūra

1. J. Bareišis, V. Kleiza, J. Kleiza, Investigation of the flexural stiffness of asymmetric multilayer beam , *Strength of Materials*, **6**(38), 601–612 (2006).
2. U.A. Girhammar, D.H. Pan, Exact static analysis of partially composite beams and beam-columns, *International Journal of Mechanical Sciences*, **49**(2), 239–255 (2007).

SUMMARY

V. Kleiza, J. Kleiza. Stress calculation method of bending multilayer structural element when bending moment acts in the planes that do not coincident with principal planes

This paper presents stress calculation method of bending multilayer structural element when bending moment acts in the planes that do not coincident with principal planes, and cross section is symmetric or asymmetric. Carrying the computation of occurring stress values in multilayer beam layers it is necessary to identify coordinates of cross-section stiffness centre, direction of principal axes, and coordinates of specific points regarding principal axes. Having this information and equation which is valid for stress calculation of bending multilayer beams it is possible to identify normal stress values at any point of the beam cross section under skew bending. It is deduced that stress values and the nature of their changes are influenced by the shape of beam cross-section, its asymmetry degree, and the direction of applied moment.

Keywords: multilayer beam, bending stiffness, skew bending.