

# Kovariantiškumas ir kodiferencija sudarant optimalų vertybinių popierių portfelį

## Igoris Belovas

Vilniaus Gedimino technikos universiteto  
docentas, daktaras  
Vilnius Gediminas Technical University,  
Assoc. Prof., PhD  
Saulėtekio al.11, LT-10223 Vilnius  
El. paštas: rastine@adm.vtu.lt

## Leonidas Sakalauskas

Vilniaus Gedimino technikos universiteto  
profesorius, hab. daktaras  
Vilnius Gediminas Technical University,  
Prof., Hab. Dr.  
Saulėtekio al.11, LT-10223 Vilnius  
El. paštas: rastine@adm.vtu.lt

## Audrius Kabašinskas

Matematikos ir informatikos instituto  
doktorantas  
Institute of Mathematics and Informatics,  
PhD student  
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius  
El. paštas: mathematica@ktl.mii.lt

*Formuojant vertybinių popierių portfelį svarbu nustatyti ryšius tarp atskirų akcijų gražų. Tačiau laikantis stabilumo prielaidos (modeliuojant akcijų gražų sekas stabiliaisiais dėsniais) klasikiniai ryšio matai (kovariacija, koreliacija) negali būti taikomi. Todėl apibendrintasis Markovitzo uždavinys yra sprendžiamas su apibendrintais ryšio matais (kovariantiškumas, kodiferencija). Parodyta, kad kodiferencijos tarp atskirų finansinių instrumentų koeficientas gerokai supaprastina portfelio formavimą. Buvo sudaryti Baltijos šalių dešimties vertybinių popierių optimalūs portfeliai.*

Ryšio tarp atskirų akcijų gražų nustatymas yra viena iš esminių problemų, kylančių formuojant vertybinių popierių portfelį. Klasikinėje ekonomikoje ir statistikoje (kai empiriniai duomenys turi pirmąjį ir antrąjį momentus) ryšį tarp dviejų atsitiktinių dydžių (gražų) apibrėžia kovariacija arba koreliacija. Laikantis akcijų gražų (a.d.) stabilumo prielaidos kovariacijos ir koreliacijos (Pirsono koreliacijos koeficientas) skaičiuoti negalima: kai stabilumo parametras  $\alpha$  atitinkamai mažesnis už 1 ir 2, nes tuomet atitinkamai neegzistuoja vidurkis ir dispersija (Belovas, Kabašinskas, Sakalauskas, 2005). Tokiais atvejais turėtų tikti ranginiai koreliacijos koeficientai (pvz., Spirmeno, Kendalo ir pan. (Kruopis 1993)) arba kontingencijos (Kobzar,

1978, p.175; Kendall, Stuart 1967) koeficientas, kuris parodo, ar sekų elgsena panaši ar ne. Kita vertus, tikslinga taikyti apibendrintus kovariacijos koeficientus – kovariantiškumą arba kodiferenciją. Ryšio matai yra apskaičiuojami laikantis stabilumo prielaidos – gražos pasiskirsčiosios pagal stabilųjį dėsnį (Belovas, Kabašinskas, Sakalauskas, 2006). Įvertinę stabiliojo dėsnio parametrus ir apskaičiavę kodiferenciją ar kovariantiškumą, sprendžiame apibendrintąjį Markovitzo uždavinį.

## Modelis ir duomenys

Nagrinėsime Baltijos šalių finansines sekas (paprastų vardinių akcijų kainų gražas). Buvo

nagrinėtas einamasis (Baltic I-list) ir oficialusis sąrašai (Baltic Main list) (Bendros Baltijos šalių vertybinių popierių rinkos biržos puslapis). Iš šių sąrašų buvo išrinkta 10 likvidžiausių sekų nuo 2000 m. sausio iki 2007 m. sausio. Mes naudojome biržos uždarymo metu nustatytą kainą (uždarymo kainą). Atlikdami analizę akcijų kainas keičiame gražomis (tolydus atsitiktinis dydis):

$$X_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{P_i};$$

čia  $\{P_i\}$  yra akcijų kainų seka. Atlikę šią transformaciją maksimalaus tikėtimumo metodu įvertiname stabilijų dėsnų parametrus:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ . Gauti rezultatai pateikiami 1 lentelėje.

1 lentelė. *Stabiliųjų sekų parametrų įverčiai*

Akcija	$\alpha$	$\beta$	$\mu$	$\sigma$
ETLAT	1,5309	-0,0649	0,0004	0,0067
GZE1R	1,2656	0,0559	0,0019	0,0091
LDJ1L	1,6094	0,1585	0,0019	0,0133
MKO1T	1,6313	0,1252	0,0030	0,0118
MNF1L	1,6283	0,1310	0,0020	0,0162
NRM1T	1,6158	0,0171	0,0008	0,0071
SNG1L	1,2872	0,3317	0,0059	0,0093
TEO1L	1,7832	0,0354	0,0000	0,0107
VNF1R	1,6789	0,2737	0,0028	0,0161
VNG1L	1,5384	0,1209	0,0025	0,0133

*Ryšio tarp atskirų akcijų gražų nustatymas*

Nustatę ryšius tarp akcijų galime apibūdinti pačią rinką, deja, klasikiniai ryšio nustatymo metodai (koreliacija) čia netinka, nes mišrusis – stabilusis skirstinys neturi antrojo momento (dispersijos), be to, duomenys yra gana asimet-

riški, tad reikia kitokių, naujoviškų ryšio nustatymo būdų.

Samorodnitsky ir Taqqu (2000) siūlo neblogą alternatyvą, kai neegzistuoja pirmieji momentai (vidurkis, dispersija). Jie įveda du kovariacijos (angl. *covariance*) pakaitalus:

- kovariantiškumą (angl. *covariation*),
- kodiferenciją (angl. *codifference*).

Jei  $X_1$  ir  $X_2$  yra simetriniai stabilieji a.d. su vienodais parametrais  $\alpha$ , tai kovariantiškumas apibrėžiamas taip:

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{(\alpha-1)} \Gamma(ds).$$

Tuomet a.d.  $X_1$  skalės parametras  $\sigma_{X_1}^\alpha$  apskaičiuojamas iš formulės  $[X_1, X_1]_\alpha = \sigma_{X_1}^\alpha$ ;

čia  $\alpha > 1$ ,  $y^{(\alpha)} = |y|^\alpha \text{sign}(\alpha)$ ,  $\Gamma$  – atsitiktinio vektoriaus  $(X_1, X_2)$  spektrinis tankis.

Kai  $\alpha = 2$ , tai

$$[X_1, X_2]_2 = \frac{1}{2} \text{Cov}(X_1, X_2)$$

ir

$[X_1, X_1]_2 = \sigma_{X_1}^2$  yra a.d.  $X_1$  dispersija.

Tuomet galime apibrėžti tam tikrą a.d.  $X \in S_\alpha$  ( $\alpha > 1$ ) kovariantiškumo normą  $\|X\| = ([X, X]_\alpha)^{1/\alpha}$  ir, jei  $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ , tai norma sutampa su skalės parametru  $\|X\|_\alpha = \sigma$ .

Kodiferencija bendru atveju apibrėžiama charakteristinėmis funkcijomis (Nowicka-Zagrajek, Wylomanska, 2006):

$$\text{cod}_{X,Y} = \ln(E \exp \{i(X - Y)\}) - \ln(E \exp \{iX\}) - \ln(E \exp \{-iY\}) =$$

$$= \ln \left( \frac{E \exp \{i(X - Y)\}}{E \exp \{iX\} \cdot E \exp \{-iY\}} \right) =$$

$$= \ln \left( \frac{\phi_{X-Y}}{\phi_X \cdot \phi_Y} \right),$$

ir empirinėmis charakteristinėmis funkcijomis

$$cod_{X,Y} = \ln \left( \frac{n \cdot \sum_{j=1}^n e^{i(X_j - Y_j)}}{\sum_{j=1}^n e^{iX_j} \cdot \sum_{j=1}^n e^{-iY_j}} \right).$$

Dviejų simetrinių (SaS) a.d.  $X$  ir  $Y$  ( $0 < \alpha \leq 2$ ) kodiferencija yra apibrėžiama remiantis skalės parametrais

$$cod_{X,Y} = \|X\|_{\alpha}^{\alpha} + \|Y\|_{\alpha}^{\alpha} - \|X - Y\|_{\alpha}^{\alpha}.$$

Kai  $\alpha = 2$ , tai  $cod_{X,Y} = \text{Cov}(X, Y)$ .

Samorodnitsky ir Taqu (2000) parodo, kad galioja

$$\begin{aligned} (1 - 2^{\alpha-1}) (\|X\|_{\alpha}^{\alpha} + \|Y\|_{\alpha}^{\alpha}) &\leq cod_{X,Y} \leq \\ &\leq \|X\|_{\alpha}^{\alpha} + \|Y\|_{\alpha}^{\alpha}; \end{aligned}$$

čia  $1 \leq \alpha \leq 2$ , tuomet sunormavę abi puses (padaliję iš  $\|X\|_{\alpha}^{\alpha} + \|Y\|_{\alpha}^{\alpha}$ ) gausime koreliacijos koeficientą

$$(1 - 2^{\alpha-1}) \leq corr_{X,Y} \leq 1.$$

Bendru atveju

$$\begin{aligned} (1 - 2^{\alpha-1}) \ln \left( \frac{1}{E \exp\{iX\} \cdot E \exp\{-iY\}} \right) &\leq cod_{X,Y} = \\ = \ln \left( \frac{E \exp\{i(X - Y)\}}{E \exp\{iX\} \cdot E \exp\{-iY\}} \right) &\leq \\ \leq \ln \left( \frac{1}{E \exp\{iX\} \cdot E \exp\{-iY\}} \right), \end{aligned}$$

tuomet sunormavę gausime, kad koreliacija tenkina sistemą

$$(1 - 2^{\alpha-1}) \leq corr_{X,Y} = \frac{\ln \left( \frac{E \exp\{iX\} \cdot E \exp\{-iY\}}{E \exp\{i(X - Y)\}} \right)}{\ln(E \exp\{iX\} \cdot E \exp\{-iY\})} \leq 1.$$

Kai  $\alpha = 2, \beta = 0$ , tuomet

$-1 \leq corr_{X,Y} = \rho_{X,Y} \leq 1$  sutampa su Pirsono koreliacijos koeficientu, o kai  $0 < \alpha \leq 1$ , tai šis koreliacijos koeficientas gali būti tik neneigiamas.

Čia iškyla problema – nėra sukurta testų, kurie leistų patikrinti hipotezę apie normuo-

tos kodiferencijos lygybę nuliui, tad hipotezei tikrinti taikome butstrapo (angl. *bootstrap method*) metodą (vieną iš Monte Karlo tipo metodų).

Norėdami nustatyti, ar Pirsono koreliacijos koeficientas lygus nuliui, naudojame Fišerio skirstinį, Spirmeno – atitinkamai Stjudento, o Kendalo – statistiką, kuri pasiskirsčiusi pagal Gauso dėsnį (Kruopis, 1993). Tikrinant hipotezę apie normuotos kodiferencijos ar apibendrintos koreliacijos koeficiento lygybę nuliui iškyla teorinių problemų. Todėl siūlomas toks algoritmas:

- Įvertiname visų empirinių sekų stabiliausius parametrus ( $\alpha, \beta, \sigma$  ir  $\mu$ ) ir stagnavimo tikimybę  $p$ ;
- Sudarome atitinkamo (normuotos kodiferencijos ar kovariantiškumo) ryšio matricą  $\rho$ ;
- Butstrapo metodu tikriname hipotezę apie  $\rho_{i,j}$  lygybę nuliui:
  - poromis generuojame sekas (su įvertintais parametrais), pereiname į paskesnį punktą;
  - įvertiname ryšio koeficientą  $\hat{\rho}_{i,j}^k$  tarp sekų  $i$  ir  $j$ , grįžtame į prieš tai buvusi punktą ir kartojame  $N (=10000)$  kartų;
  - sudarome gautų įverčių variacinę eilutę  $\hat{\rho}_{i,j}^{(k)}$ ;
  - jei  $\hat{\rho}_{i,j}^{([N \cdot 0,025])} \leq \rho_{i,j} \leq \hat{\rho}_{i,j}^{([N \cdot 0,975])}$ , tai hipotezės apie  $\rho_{i,j}$  lygybę nuliui atmesiti negalime su pasiklovimo lygmeniu 0,05.

Apskaičiuokime kovariantiškumą ir kodiferenciją dešimčiai ilgiausias sekas turinčių akcijų (MNF1L, LDJ1L, VNF1R, NRM1T, MKO1T, GZE1R, ETLAT, VNG1L, SNG1L, TEO1L) ir sudarykime koreliacijų (2–3 lentelės) lenteles (sekų ilgiai suvienodinti ir yra 1427). Kita vertus, portfelio teorijoje reikalinga kovariacija arba jos atitikmuo, todėl pateikiame ir apibendintų kovariacijų lenteles (4–5 lentelės).

2 lentelė. Apibendrintas koreliacijos koeficientas (simetrinis) (visi reikšmingi su pasiklovimo lygmeniu, didesniu už 0,006)

	TEOIL	SNGIL	VNGIL	ETLAT	GZEIR	MKOIT	NRMIT	VNFIR	LDJIL	MNFIL
TEOIL	1	0,104	0,1466	0,3269	0,1344	0,4468	0,1613	0,2519	0,1522	0,1351
SNGIL	0,104	1	0,157	0,1269	0,1442	0,1219	0,1471	0,1271	0,1784	0,1322
VNGIL	0,1466	0,157	1	0,1587	0,2365	0,1599	0,1951	0,2277	0,1648	0,2056
	TEOIL	SNGIL	VNGIL	ETLAT	GZEIR	MKOIT	NRMIT	VNFIR	LDJIL	MNFIL
ETLAT	0,3269	0,1269	0,1587	1	0,1583	0,3423	0,17	0,179	0,1544	0,1556
GZEIR	0,1344	0,1442	0,2365	0,1583	1	0,1464	0,1862	0,2013	0,1546	0,1874
MKOIT	0,4468	0,1219	0,1599	0,3423	0,1464	1	0,1681	0,1873	0,1333	0,1512
NRMIT	0,1613	0,1471	0,1951	0,17 <sup>c</sup>	0,1862	0,1681	1	0,2054	0,1943	0,1962
VNFIR	0,2519	0,1271	0,2277	0,179	0,2013	0,1873	0,2054	1	0,1584	0,1701
LDJIL	0,1522	0,1784	0,1648	0,1544	0,1546	0,1333	0,1943	0,1584	1	0,18
MNFIL	0,1351	0,1322	0,2056	0,1556	0,1874	0,1512	0,1962	0,1701	0,18	1

3 lentelė. Kodiferencijos normos koeficientas (visi reikšmingi)

	TEOIL	SNGIL	VNGIL	ETLAT	GZEIR	MKOIT	NRMIT	VNFIR	LDJIL	MNFIL
TEOIL	1	0,0065	0,0088	0,34	0,011	0,8072	0,0081	0,0569	0,0155	0,0024
SNGIL	0,0065	1	0,0396	0,0021	0,0299	0,001	0,0042	0,0044	0,0033	0,0044
VNGIL	0,0088	0,0396	1	0,0115	0,1016	0,0172	0,0312	0,0442	0,0174	0,0848
ETLAT	0,34	0,0021	0,0115	1	0,019	0,3744	0,0136	0,02	0,0092	0,0082
GZEIR	0,011	0,0299	0,1016	0,019	1	0,0185	0,0246	0,0266	0,0085	0,0296
MKOIT	0,8072	0,001	0,0172	0,3744	0,0185	1	0,015	0,0267	0,0078	0,0111
NRMIT	0,0081	0,0042	0,0312	0,0136	0,0246	0,015	1	0,0231	0,0281	0,0447
VNFIR	0,0569	0,0044	0,0442	0,02	0,0266	0,026	0,0231	1	0,0017	0,0151
LDJIL	0,0155	0,0033	0,0174	0,0092	0,0085	0,0078	0,0281	0,0017	1	0,0307
MNFIL	0,0024	0,0044	0,0848	0,0082	0,0296	0,0111	0,0447	0,0151	0,0307	1

4 lentelė. Kovariantiškumo koeficientas

	TEOIL	SNGIL	VNGIL	ETLAT	GZEIR	MKOIT	NRMIT	VNFIR	LDJIL	MNFIL
TEOIL	0,0031	0,0008	0,0012	0,0028	0,0013	0,0029	0,0013	0,0017	0,0014	0,0011
SNGIL	0,0008	0,0084	0,0014	0,0012	0,0015	0,0009	0,0014	0,001	0,0017	0,0012
VNGIL	0,0012	0,0014	0,0091	0,0016	0,0026	0,0012	0,0019	0,0018	0,0017	0,0019

4 lentelė. **Kovariantiškumo koeficientas** (tesinys)

	TEO1L	SNG1L	VNG1L	ETLAT	GZE1R	MKO1T	NRM1T	VNF1R	LDJ1L	MNF1L
ETLAT	0,0028	0,0012	0,0016	0,0103	0,0018	0,0028	0,0018	0,0016	0,0017	0,0015
GZE1R	0,0013	0,0015	0,0026	0,0018	0,0125	0,0014	0,0021	0,002	0,0018	0,002
MKO1T	0,0029	0,0009	0,0012	0,0028	0,0014	0,0063	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012
NRM1T	0,0013	0,0014	0,0019	0,0018	0,0021	0,0013	0,0088	0,0017	0,0021	0,0019
VNF1R	0,0017	0,001	0,0018	0,0016	0,002	0,0013	0,0017	0,0071	0,0014	0,0014
LDJ1L	0,0014	0,0017	0,0017	0,0017	0,0018	0,0012	0,0021	0,0014	0,011	0,0018
MNF1L	0,0011	0,0012	0,0019	0,0015	0,002	0,0012	0,0019	0,0014	0,0018	0,0091

5 lentelė. **Kodiferencijos koeficientas**

	TEO1L	SNG1L	VNG1L	ETLAT	GZE1R	MKO1T	NRM1T	VNF1R	LDJ1L	MNF1L
TEO1L	7,4E-04	1,1E-05	1,3E-05	6,0E-04	2,1E-05	6,0E-04	1,1E-05	3,5E-05	2,6E-05	3,0E-06
SNG1L	1,1E-05	4,2E-04	2,0E-05	1,6E-06	1,7E-05	1,6E-06	2,1E-06	5,7E-06	1,6E-06	2,9E-06
VNG1L	1,3E-05	2,0E-05	4,0E-04	8,7E-06	7,2E-05	2,2E-05	1,2E-05	4,4E-05	9,1E-06	3,9E-05
ETLAT	6,0E-04	1,6E-06	8,7E-06	1,1E-03	1,7E-05	6,0E-04	1,0E-05	2,6E-05	7,3E-06	6,9E-06
GZE1R	2,1E-05	1,7E-05	7,2E-05	1,7E-05	6,4E-04	3,3E-05	1,7E-05	4,0E-05	5,3E-06	2,6E-05
MKO1T	6,0E-04	1,6E-06	2,2E-05	6,0E-04	3,3E-05	7,2E-04	1,9E-05	1,4E-05	1,2E-05	1,2E-05
NRM1T	1,1E-05	2,1E-06	1,2E-05	1,0E-05	1,7E-05	1,9E-05	3,4E-04	2,2E-05	1,4E-05	1,9E-05
VNF1R	3,5E-05	5,7E-06	4,4E-05	2,6E-05	4,0E-05	1,4E-05	2,2E-05	2,4E-04	2,1E-06	1,2E-05
LDJ1L	2,6E-05	1,6E-06	9,1E-06	7,3E-06	5,3E-06	1,2E-05	1,4E-05	2,1E-06	5,2E-04	2,0E-05
MNF1L	3,0E-06	2,9E-06	3,9E-05	6,9E-06	2,6E-05	1,2E-05	1,9E-05	1,2E-05	2,0E-05	4,0E-04

### Portfelio parinkimas

Sudarykime vertybinių popierių portfelį iš  $n$  akcijų. Kiekvienos akcijos svoriui įvertinti sprendžiame optimizavimo uždavinį (Barami, 2006; Krokmal, Palmquist, Uryasev, 2002):

minimizuoti,

$$\lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} - (1 - \lambda) \sum_i \omega_i \mu_i$$

pagal  $\omega_i, i = 1, \dots, n$ , su sąlygomis (1)

$$\sum_i \omega_i = 1,$$

$$\omega_i > 0, \quad i = 1, \dots, n;$$

čia  $\omega_i$   $i$ -osios akcijos svoris portfelyje,  $\mu_i$  –  $i$ -osios akcijos gražų sekos vidurkis ( $\alpha$ -stabiliuotu atveju parametras  $\mu$ ),  $\sigma_{ij}$  – kovariacija tarp  $i$ -osios ir  $j$ -osios akcijos gražų ( $\alpha$ -stabiliuotu atveju kovariacijos atitiktumu – kodiferencija),  $\lambda \in [0,1]$  – optimizavimo konstanta (mes parenkame 1/2). Pirmoji tikslo funkcijos dedamoji charakterizuoja riziką, o antroji – tikėtiną gražą.

Kadangi  $\alpha$ -stabilaus modelio atveju neegzistuoja nei dispersija, nei standartinis nuokrypis, taip pat ir kovariacija (išskyrus  $\alpha=2$ ), portfelio svoriams optimizuoti gali būti naudojama ir tokia tikslo funkcija (Rachev, Tokat, Schwartz, 2003):

$$F(w) = c \cdot \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| \sum_{i=1}^n w_i (X_{j,i} - \mu_i) \right|^\gamma \right)^{1/\gamma} - \sum_{i=1}^n w_i \mu_i ;$$

čia  $\gamma = \min(\alpha_i)$ ,  $c = 1/\gamma$ ,  $\mu_i$  – atitinkamų vertybinių popierių vidutinės pelno normos ( $\alpha$ -stabiliuoju atveju parametras  $\mu$ ),  $X_{j,i}$  –  $i$ -ojo vertybinio popieriaus pelno norma  $j$ -uoju momentu. Toliau sprendžiamas optimizavimo uždavinys:

minimizuoti,

$$F(w) \quad \text{pagal } w_i, i = 1, \dots, n, \text{ su sąlygomis} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1,$$

$$w_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Į lygčių sistemas (1) ir (2) įtraukus papildomą sąlygą

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot \mu_i = \mu_p ,$$

galima rasti optimalų portfelių su norima grąža  $\mu_p$ .

Pavyzdžiui, iš duotųjų akcijų galima sudaryti portfelius su tokiais optimaliais svoriais (žr. 6 lentelę).

Pastebima, kad šios dienos kursu portfelis (1) duotą didesnę pelną.

Kartu su svorių optimizavimu svarbu nagrinėti ir portfelio diversifikavimo uždavinį, nes portfelyje esant daugiau ( $n > 2$ ) akcijų neretai svoriai tampa nykstantai maži ir investicija į tokias akcijas yra beprasme, o kartais ir neįmanoma (reikia įsigyti pusę akcijos ir pan.).

## Išvados

Darbe buvo tiriamas ryšys tarp Baltijos šalių akcijų grąžų ir atsižvelgiant į šį ryšį sudaromas optimalus vertybinių popierių portfelis. Finansinės sekos buvo modeliuojamos stabiliaisiais dėsniais, kuriems neegzistuoja antrasis momentas ( $1,27 < \alpha < 1,78$ ). Kadangi dispersija neegzistuoja, vietoje kovariacijos buvo skaičiuojami kovariantiškumo ir kodiferencijos koeficientai. Šie ryšio matai buvo naudojami sudarant Baltijos šalių dešimties vertybinių popierių optimalų portfelių.

Sprendžiant (1) sistemą (su kodiferencijų matrica) didelių optimizavimo problemų neiškyla net esant  $n > 10$  akcijų, tačiau (2) sistemos (nenaudojant kodiferencijų matricos) atveju optimizavimas yra sudėtingas net esant nedideliam akcijų skaičiui. Taigi kodiferencijos tarp atskirų finansinių instrumentų koeficientas gerokai supaprastina portfelio sudarymą.

6 lentelė. *Optimalūs vertybinių popierių portfelio svoriai išsprendus (1) ir (2) sistemas*

	(1)	(2)
TEO1L	0,01931127121831664739	0,00000458324159077873
SNG1L	0,14748791669745869859	0,20832600703143941412
VNG1L	0,06520432421240375531	0,07441099228178453540
ETLAT	0,02316874195215026799	0,00877015050036948456
GZE1R	0,06396124707815362131	0,26926385550778603184
MKO1T	0,00856555150906847772	0,12372356319707422667
NRM1T	0,13592436635025012537	0,04210572877402151554
VNF1R	0,28168613842527678859	0,11068516003731768138
LDJ1L	0,11707050740499311270	0,07642465720903288129
MNF1L	0,13761993515192852411	0,08628530221958331803

## LITERATŪRA

- BARAMI, S. (2006). Portfolio Optimization with Optimal Search. Prieiga per internetą: [http://www.cs.ucla.edu/~siavosh/Portfolio\\_Selection\\_final.pdf](http://www.cs.ucla.edu/~siavosh/Portfolio_Selection_final.pdf)
- BELOVAS, I.; KABAŠINSKAS, A.; SAKALAUSKAS, L. (2005). Vertybinių popierių rinkos stabilijų modelių tyrimas. Iš *Informacinės technologijos 2005*: Konferencijos pranešimų medžiaga. Kaunas: Technologija, p. 439–462.
- BELOVAS, I.; KABAŠINSKAS, A.; SAKALAUSKAS, L. (2006). Returns modelling problem in the Baltic equity market. In *Proceedings of the 5th International Conference on Operational Research: Simulation and Optimization in Business and Industry*. Kaunas: Technologija, p. 3–8.
- Bendros Baltijos šalių vertybinių popierių rinkos biržos puslapis*. Prieiga per internetą: [www.omxgroup.com](http://www.omxgroup.com) [žiūrėta 2007-01-20].
- KENDALL, M.G.; STUART, A. (1967). *The Advanced Theory of Statistics*, vol. 2. 2nd edition. London: Griffin.
- KOBZAR, A. I. (1978). *Matematiko-statistinės metodų v elektronnoje tehnike* (rus.). Moskva: Nauka.
- KROKHMA, L. P.; PALMQUIST, J.; URYASEV, S. (2002). Portfolio optimization with conditional Value-at-Risk objective and constraints. *The Journal of Risk* 4(2), p. 11–27.
- KRUOPIS, J. (1993). *Matematinė statistika*. Vilnius: Mokslas.
- NOWICKA-ZAGRAJEK, J.; WYLOMANSKA, A. (2006). The dependence structure for PARMA models with  $\alpha$ -stable innovations. *Acta Physica Polonica B* 37(11), p. 3071–3081.
- RACHEV, S. T.; TOKAT, Y.; SCHWARTZ, E. S. (2003). The stable non-Gaussian asset allocation: a comparison with the classical Gaussian approach. *Journal of Economic Dynamics & Control* 27, p. 937–969.
- SAMORODNITSKY, G.; TAQQU, M.S. (2000). *Stable non-Gaussian random processes, stochastic models with infinite variance*. New York-London: Chapman & Hall.

## ON COVARIATION AND CODIFFERENCE IN OPTIMAL PORTFOLIO CONSTRUCTION

Igoris Belovas, Audrius Kabašinskas, Leonidas Sakalauskas

### Summary

Constructing an optimal portfolio it is essential to determine possible relationships between different stock returns. However, under the assumption of stability (stock returns are modelled with stable laws) accustomed relationship measures (covariance, correlation) can not be applied. Thus generalized Markowitz problem is solved with generalized relationship measures (covariation, codifference). Port-

folio construction strategies with and without codifference coefficients matrix are given. We show that the codifference application strongly simplifies the construction of the optimal portfolio. Optimal stock portfolios (with 10 most realizable Baltic States stocks) with and without codifference coefficients matrix are constructed.