ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Сигуте Вакринене, Арнольдина Пабединскайте

Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса
ул. Саулетекио, 11, Вильнюс, Литва
E-mail: arna@vv.vtu.lt

Рассматривается проблема оптимального инвестирования, когда при ограниченном объеме средств необходимо принять решение, какие суммы в какие проекты инвестировать. На основе параметрических моделей линейного программирования исследуются стратегии инвестирования, гарантирующие определённую среднюю прибыль, стабильность и динамика этих стратегий при изменении показателей прибыльности и инвестируемой величины средств.
С помощью стохастической модели при условии, что известен закон распределения коэффициентов прибыльности различных проектов инвестирования, определяется инвестиционное решение с заданным доверительным уровнем. Данное инвестиционное решение максимизирует нижнюю границу прибыли. Другая модель стохастического программирования используется для поиска стратегии инвестирования, максимизирующей вероятность того, что нижняя граница прибыли не меньше некоторой фиксированной величины. На примере исследуется зависимость оптимальной стратегии инвестирования от доверительной вероятности и вариации случайных коэффициентов прибыльности.

Ключевые слова: *оптимальное инвестирование, параметрическое программирование, стохастическое программирование*

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы исследования операций достаточно широко используются при моделировании различных практических задач оптимального распределения ресурсов [1]. В работе [2] для выбора оптимальной стратегии превенции травм проблема моделируется с помощью матричной игры. В статье [3] для нахождения оптимального распределения средств, имеющихся для превенции травм, используется задача стохастического программирования и определяется эквивалентная ей модель сепарабельного программирования. Анализ зависимости оптимальной стратегии превенции травм от уровня доверительной вероятности и дисперсии затрат на превентивные мероприятия осуществлялся в [4]. В [5] проблема оптимального инвестирования исследовалась с помощью моделей матричной игры и параметрического программирования.

Для определения оптимальной политики инвестирования (или распределения средств) возможно использование различных моделей. Выбор модели зависит от того, какие предположения делаются относительно параметров задачи. В данной статье исследуется случай, когда коэффициенты прибыльности различных проектов являются случайными величинами с известными законами распределения и их численными характеристиками. Оптимальную стратегию инвестирования и среднюю ожидаемую величину прибыли даёт решение задачи линейного программирования и оптимальное значение целевой функции. Модели параметрического программирования используются для анализа чувствительности оптимальной стратегии инвестирования относительно изменения коэффициентов прибыльности и исследования стабильности и динамики при изменении общей величины инвестируемых средств.

В том случае, когда оптимальная стратегия инвестирования изменяется при небольших изменениях коэффициентов прибыльности, целесообразно использовать модель стохастического программирования, с помощью которой определяется стратегия инвестирования, максимизирующая нижнюю границу прибыли при заданном уровне доверительной вероятности. Если инвестору достаточна некоторая фиксированная нижняя граница величины прибыли, то целесообразно использовать другую модель стохастического программирования, которая позволяет максимизировать вероятность того, что средняя ожидаемая прибыль будет не меньше заданной. В обоих случаях оптимальная стратегия инвестирования имеет минимальную дисперсию.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Допустим, что $c_1, c_2, ..., c_m$ – это средства, необходимые для полного финансирования проектов $P_1, P_2, ..., P_m$. Среднюю прибыль, которую получим, если будем полностью финансировать проект P_i (то есть выделим всю необходимую сумму c_i), обозначим $\overline{a_i}$. Тогда будущую прибыль от каждого проекта a_i считаем случайной величиной, среднее математическое ожидание которой известно. Когда средства, предназначенные для инвестирования C меньше, чем сумма $\sum_{i=1}^{m} c_i$, то есть средств недостаточно для финансирования всех проектов, возникает задача выбора проектов для инвестирования. Сделаем предположение, что частичное финансирование проекта приносит пропорционально меньшую прибыль.

Переменные x_i, $i = 1, 2, ..., m$, определим как долю общих средств, необходимую для полного финансирования i-го проекта. Тогда произведение $c_i x_i$ будет означать величину средств, необходимую для проекта P_i, а переменные удовлетворяют условиям $0 \le x_i \le 1$, $i = 1, 2, ..., m$.

Оптимальное распределение инвестиционных средств C получим в результате решения задачи линейного программирования:

$$\max \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_i x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \le C, \tag{1}$$

$$0 \le x_i \le 1,\ i = 1,2, ..., m.$$

Оптимальное значение целевой функции V_0 является средней величиной прибыли, соответствующей инвестиционному плану $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m)$, который является решением задачи (1).

Каким образом изменения величины инвестируемых средств влияют на оптимальную стратегию инвестирования и соответствующую среднюю прибыль, можно определить, решая задачу параметрического программирования:

$$\max \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_i x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \le C + t, \tag{2}$$

$$0 \le x_i \le 1,\ i = 1, 2, ..., m.$$

Решив эту задачу, получим разбиение области изменения параметра t (или области изменения величины C) на интервалы:

$$(0; C_1), (C_1; C_2), ..., (C_{i-1}; C_i), ..., (C_{m-1}; C_{\max}), C_{\max} = \sum_{i=1}^{m} c_i .$$

Количество таких интервалов совпадает с количеством рассматриваемых инвестиционных проектов m. В каждом интервале решение стабильно в том смысле, что финансируются те же самые проекты (один из них неполностью). Средняя прибыль в i-м интервале имеет фиксированную линейную зависимость от параметра t

$$V_i = b_i t + d_i .$$

При переходе из интервала (t_{i-1}; t_i) в интервал (t_i; t_{i+1}) все финансировавшиеся проекты финансируются полностью, и начинается финансирование нового проекта, которое будет полным только в конце второго интервала. В новой зависимости

$$V_{i+1} = b_{i+1} t + d_{i+1} ,$$

коэффициент $b_{i+1} \le b_i$ (то есть скорость увеличения средней прибыли не возрастает, когда увеличивается величина инвестируемых средств; даже наоборот – время от времени уменьшается).

Таким образом проекты могут быть ранжированы по очередности начала их финансирования при увеличении инвестиционных средств. Допустим, что индекс j означает номер проекта P_i в этой упорядоченной очереди. Например, $P_{ij} \succ P_{kj+1}$ означает, что i-й проект более прибылен, чем k-й, то есть финансирование k-го проекта (может быть неполном) начинается только в том случае, если i-му проекту уже выделена вся необходимая ему величина средств.

Рассмотрим интервал (C_{k-1}; C_k), в котором решение стабильно. Допустим, что в этом интервале финансируются следующие проекты: 1-й, 2-й, ..., k-й, то есть $P_{11} \succ P_{22} \succ P_{33} \succ \ldots \succ P_{kk}$, (здесь первые индексы могут идти не в порядке увеличения). Фиксируя величину инвестиционных средств C_0, принадлежащую интервалу (C_{i-1}; C_i), можно исследовать, в каких пределах могут изменяться коэффициенты целевой функции $\overline{a_i}$, $i = 1, ..., n$, чтобы решение осталось неизменным. Анализ чувствительности решения относительно коэффициентов целевой функции покажет, насколько может изменяться (уменьшаться) каждый $\overline{a_i}$ (при постоянных остальных коэффициентах $\overline{a_i}$), чтобы i-й проект остался в числе финансируемых. Или до какой величины может увеличиться $\overline{a_i}$ (при постоянных остальных коэффициентах $\overline{a_i}$), чтобы началось финансирование i-го проекта. Таким образом получаем интервалы

$$\underline{\underline{a_i}} \le \overline{a_i} \le \overline{\overline{a_i}} .$$

Частичное решение параметрической задачи

$$\max \sum_{i=1}^{k} (\overline{a}_i - h_i t) x_i + \sum_{i=k+1}^{m} \overline{a}_i x_i ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \le C_0 , \qquad (3)$$

$$0 \le x_i \le 1, i = 1,2, ..., m,$$

то есть интервал (t_{i-1}; t_i), которому принадлежит значение $t = 0$, покажет, на сколько процентов могут уменьшиться все числа $\overline{a_i}$, $i = 1, ..., k$, чтобы 1-й, 2-й, ..., k-й проекты целесообразно было финансировать. Кроме того, в результате будет установлено, какой из проектов при уменьшении ожидаемой средней прибыли на t_i процентов необходимо перестать финансировать. Станет ясно также, какой из проектов в этом случае надо начать финансировать (здесь $h_i = 0.01\overline{a}_i$).

Можно исследовать, на сколько процентов должны увеличиться коэффициенты $\overline{a_i}$, $i \geq k+1$, чтобы начальный оптимальный при $C = C_0$ план инвестирования изменился. Для этого следует решить задачу параметрического программирования:

$$\max\Big(\sum_{i=1}^{k} \overline{a}_i x_i + \sum_{i=k+1}^{m} (\overline{a}_i + h_i t) x_i\Big),$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \leq C_0, \tag{4}$$

$$0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Граничная точка интервала (t_{i-1}; t_i), которому принадлежит значение $t = 0$, показывает, что при увеличении коэффициента $\overline{a_s}$ на t_i процентов, будет начато финансирование s-го проекта, если он является $(k+1)$-м в ранее упомянутой ранжированной последовательности проектов в смысле их прибыльности.

Аналогичные исследования можно осуществить для одного проекта, например P_k. Допустим, что средняя прибыль, которую можно получить в результате полного финансирования этого проекта, $\overline{a_k}$ изменяется от 0 до $+\infty$. Методы параметрического программирования позволяют определить, как в этом случае будет меняться место проекта P_k в ранжированной последовательности проектов, оптимальная стратегия инвестирования и соответствующая ей средняя ожидаемая прибыль.

Для этого необходимо полностью решить следующую задачу параметрического программирования:

$$\max\Big(\sum_{i=1, i\neq k}^{k} \overline{a}_i x_i + (\overline{a}_k + h_k t) x_k\Big),$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \leq C_0, \tag{5}$$

$$0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

то есть найти все интервалы ($-\infty$; t_1), (t_1; t_2), ..., (t_{i-1}; t_i), ..., (t_{l-1}; $+\infty$).

Следует отметить, что приоритет одному или другому проекту предоставляется не только по величине среднеожидаемой прибыли (числа $\overline{a_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$). Выбор оптимального набора проектов для инвестирования зависит и от затрат на их реализацию (от коэффициентов c_i). Поэтому целесообразно решать задачу параметрического программирования с параметризацией коэффициентов при переменных в ограничениях (5). В математическом смысле задачи такого рода сложнее, чем те, в которых параметризованы коэффициенты в целевой функции или правые части ограничений. Поэтому рассмотрим эквивалентную задачу.

Для задачи (1) запишем двойственную задачу линейного программирования:

$$\min\Big(Cy + \sum_{i=1}^{m} y_i\Big),$$

$$c_i y + y_i \geq \overline{a}_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

$y \geq 0,\ \ y_i \geq 0\,,\ \ i = 1, 2, ..., m.$

Разделив каждое ограничение на число c_i, получим задачу линейного программирования, эквивалентную (6):

$$\min(Cy + \sum_{i=1}^{m} y_i\ ),$$

$$y + \frac{y_i}{c_i} \geq \frac{\overline{a}_i}{c_i}\,,\ i = 1, 2, ..., m, \tag{7}$$

$$y \geq 0,\ \ y_i \geq 0\,,\ i = 1, 2, ..., m.$$

Двойственная (7) задача линейного программирования:

$$\max \sum_{i=1}^{m} \frac{\overline{a}_i}{c_i} z_i\ ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \leq C\ , \tag{8}$$

$$0 \leq z_i \leq c_i\,,\ i = 1, 2, ..., m$$

является эквивалентной задаче (1), только значение переменных z_i несколько другое. Здесь z_i, $i = 1, 2, ..., m$ показывает, какая величина средств выделяется i-му проекту.

Осуществив анализ чувствительности решения задачи (8) относительно коэффициентов целевой функции, получаем интервалы:

$$\underline{g_i} \leq \frac{\overline{a}_i}{c_i} \leq \overline{g_i} \text{ или } \underline{c_i} \leq c_i \leq \overline{c_i} \text{ для всех } i = 1, 2, ..., m.$$

Параметризируя один из коэффициентов целевой функции задачи (8), например $\frac{\overline{a}_k}{c_k}$, то есть решая задачу параметрического программирования:

$$\max\ (\ \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \frac{\overline{a}_i}{c_i} z_i + (\frac{\overline{a}_k}{c_k} + t) z_k\ )\,,$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \leq C\ , \tag{9}$$

$$0 \leq z_i \leq c_i\,,\ i = 1, 2, ..., m,$$

для отношения $\frac{\overline{a}_k}{c_k}$ получим интервалы изменения, в каждом из которых оптимальная стратегия инвестирования не изменяется, а в различных интервалах стратегии различны.

Коэффициентом прибыльности γ_i проекта P_i назовём отношение $\frac{\overline{a}_i}{c_i}$. Число $\gamma_i = \frac{\overline{a}_i}{c_i}$ показывает, какую среднюю прибыль получим от инвестирования одной денежной единицы в i-й проект.

Решая задачу параметрического программирования:

$$\max \sum_{i=1}^{m} \gamma_i z_i ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \le C , \qquad (10)$$

$$0 \le z_1 \le c_1 ,$$

$$\ldots\ldots$$

$$0 \le z_k \le c_k + t ,$$

$$\ldots\ldots$$

$$0 \le z_m \le c_m ,$$

получим разбиение области изменения коэффициента c_k на интервалы, в каждом из которых место проекта в ранжированной последовательности проектов и оптимальный план инвестирования P_k остаются стабильными, но будут меняться при переходе к другому интервалу.

В том случае, когда коэффициенты a_i являются случайными величинами, найденными с помощью описанных детерминированных моделей, где в целевой функции стоят средние величины $\overline{a_i}$, планы инвестирования максимизируют среднюю прибыль. Чтобы с некоторой вероятностью p_1 можно было утверждать, что при использовании оптимальной стратегии инвестирования получаемая прибыль будет не меньше некоторой величины, необходимо решить задачу стохастического программирования:

$$\max \text{V}$$

$$\text{P}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \ge \text{V}\right) \ge p_1 , \qquad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \le \text{C},$$

$$0 \le x_i \le 1, \; i = 1, 2, ..., m.$$

Оптимальное значение целевой функции этой задачи W_1 и является величиной прибыли, которую с вероятностью не меньшей, чем p_1, получим, если осуществим инвестицию имеющихся средств C согласно решению задачи стохастического программирования $X_1 = (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{m1})$, где компонента x_{i1} показывает, какой процент всех необходимых средств должно быть выделено i-му проекту.

Если фиксируется нижняя граница прибыли W_2, то возможно найти стратегию инвестирования, которая максимизирует вероятность, что будущая прибыль будет не меньше фиксированного уровня W_2. Для этого надо решить задачу стохастического программирования:

$$\max \text{P}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \ge W_2\right),$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \leq \text{C}, \tag{12}$$

$0 \leq x_i \leq 1$, i = 1, 2, ..., m.

Если $X_2 = (x_{12}, x_{22}, ..., x_{m2})$ является решением задачи, а p_2 – оптимальное значение целевой функции, то с вероятностью, не меньше p_2, можно ожидать, что прибыль будет не меньше W_2.

3. ПРИМЕР АНАЛИЗА ИНВЕСТИЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ

Допустим, что имеется пять проектов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, для полного финансирования которых необходимы следующие величины инвестируемых средств: $c_1 = 5$, $c_2 = 10$, $c_3 = 20$, $c_4 = 25$, $c_5 = 40$. Допустим также, что будущая прибыль от каждого проекта является нормально распределённой случайной величиной с соответсвующим математическим ожиданием: $\overline{a_1} = 1$, $\overline{a_2} = 2$, $\overline{a_3} = 3$, $\overline{a_4} = 4$, $\overline{a_5} = 5$. Числа c_i подобраны так, чтобы их сумма была равна 100, поэтому могут интерпретироваться как процент от общей суммы, необходимой для финансирования всех проектов.

В результате решения задачи параметрического программирования (2) получаем пять интервалов изменения параметра С, в которых оптимальная стратегия инвестирования остаётся стабильной в том смысле, что не изменяется набор финансируемых проектов (полностью или частично). В таблице 1 представлены функции увеличения средней прибыли в каждом из интервалов разбиения, из которой видно, что скорость возрастания для различных интервалов различна.

Таблица 1

(0; 5)	(5; 15)	(15; 40)	(40; 60)	(60; 100)
$V_0 = 0{,}2C$	$V_0 = 0{,}2C$	$V_0 = 0{,}16C{+}0.6$	$V_0 = 0{,}1C{+}1$	$V_0 = 0{,}075C{+}1.825$

На рис. 1 видно, каким образом изменяется оптимальная стратегия инвестирования с увеличением общей величины инвестируемых средств.

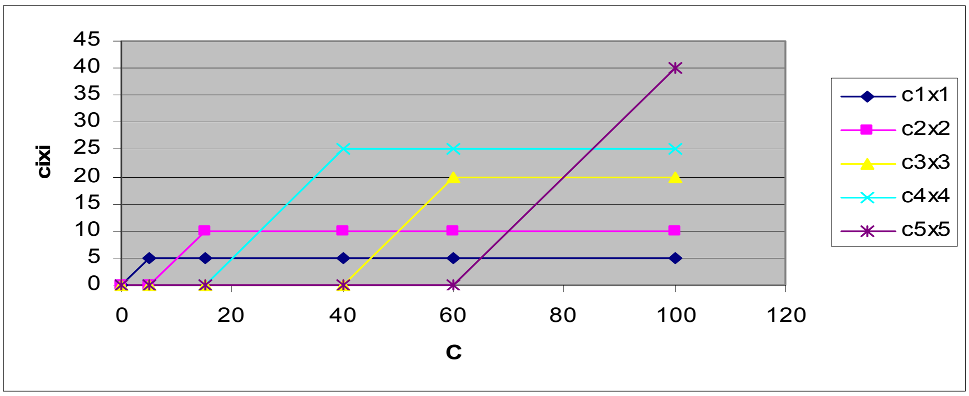

Рис. 1. *Зависимость оптимального плана инвестирования от имеющихся средств С*

Основанием для ранжирования проектов являются коэффициенты эффективности $\gamma_i = \dfrac{\overline{a}_i}{c_i}$:

$\gamma_1 = 0{,}2, \gamma_2 = 0{,}2, \gamma_3 = 0{,}15, \gamma_4 = 0{,}16, \gamma_5 = 0{,}125 \Rightarrow \text{P}_1 \sim \text{P}_2 \succ \text{P}_4 \succ \text{P}_3 \succ \text{P}_5$.

Исследуем чувствительность решения задачи (1) относительно изменения коэффициентов целевой функции при $C_0 = 30$ ($V_0 = 5{,}4$). Получаем, что оптимальная стратегия инвестирования $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0{,}6$, $x_5 = 0$ не изменяется, пока каждый коэффициент a_{ij} будет изменяться в указанном интервале при неизменных остальных коэффициентах.

Решение параметрической задачи (10) показывает, что оптимальная стратегия инвестирования (при $C_0 = 30$) должна измениться, когда все $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ и $\overline{a}_4$ уменьшатся на величину 0,111111, а $\overline{a}_3$ и $\overline{a}_5$ на эту величину увеличатся (табл. 2). Таким образом, видно, что при изменении нескольких коэффициентов разрешается небольшой шаг (h), поэтому целесообразно использовать стохастические модели.

Таблица 2

$\underline{\underline{a}}_i$	$\overline{a}_i$	$\overline{\overline{a}}_i$
0,8	$\overline{a}_1$	$+\infty$
1,6	$\overline{a}_2$	$+\infty$
$-\infty$	$\overline{a}_3$	3,2
3,75	$\overline{a}_4$	5
$-\infty$	$\overline{a}_5$	6,4

Для простоты предположим, что коэффициент вариации $v = \dfrac{\sigma_i}{\overline{\overline{a}}_i}$ для всех случайных величин a_1, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ одинаков. Решение задачи (11) при доверительном уровне $p = 0{,}99$, $C_0 = 30$, а вариация изменяется и позволяет исследовать, как средняя прибыль V и нижняя граница прибыли W зависят от разброса случайных коэффициентов. Эта зависимость представлена на рис. 2. Когда вариация v больше, чем 80%, оптимально инвестировать не всю величину C, а только её часть. Например, когда v = 0,85 оптимальным является инвестировать только 23,758 денежных единиц.

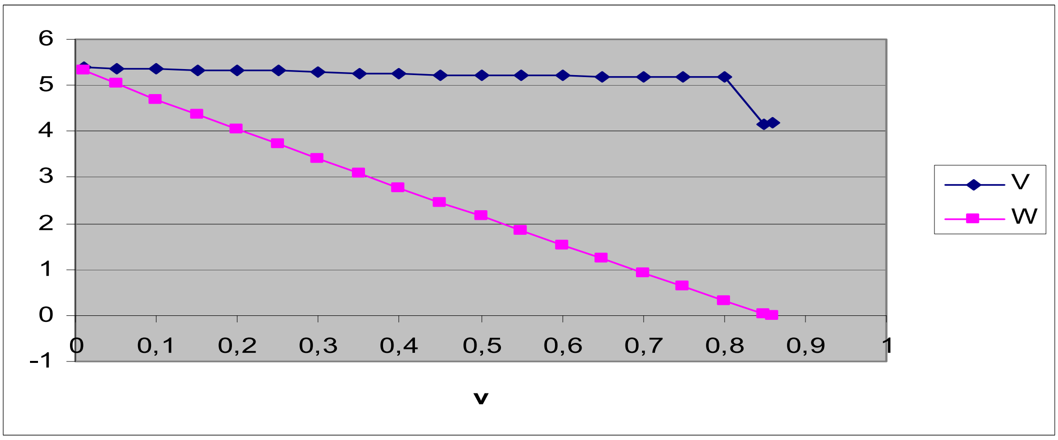

Рис. 2. *Зависимость средней прибыли V и нижней границы прибыли W от вариации v*

На рис. 3 представлена зависимость оптимальной стратегии инвестирования, которая максимизирует нижнюю границу прибыли, зависящую от вариации случайных коэффициентов при доверительной вероятности $p = 0{,}99$. Можно заметить тенденцию, при которой увеличение вариации приводит к тому, что средства распределяются более равномерно. При вариации 20% изменяются приоритеты относительно третьего и четвёртого проектов.

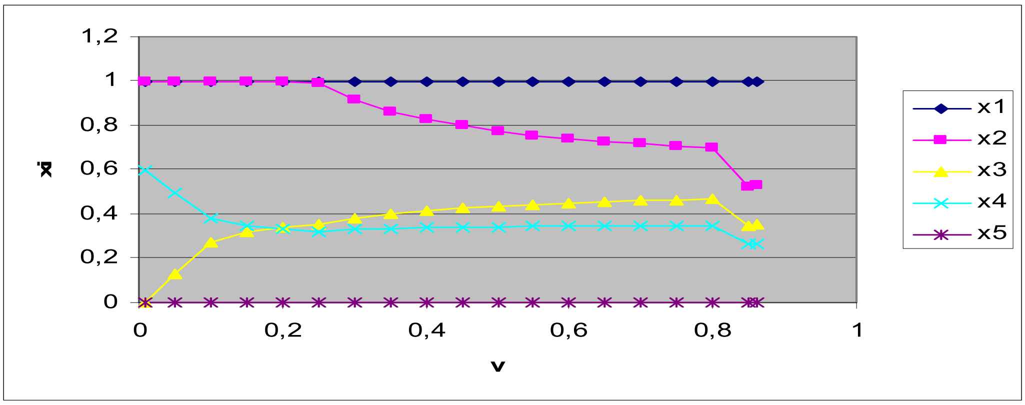

Рис. 3. *Зависимость оптимального плана инвестирования от вариации*

На рис. 4 представлена линейная зависимость нижней границы прибыли от вариации коэффициентов при различных доверительных уровнях.

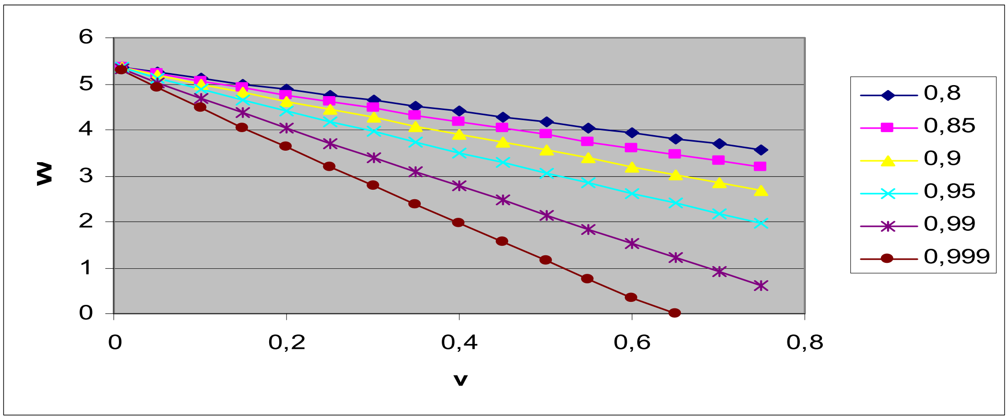

Рис. 4. *Зависимость нижней границы прибыли от вариации*

На рис. 5 представлена зависимость оптимальной стратегии от величины доверительной вероятности при вариации v = 0,5.

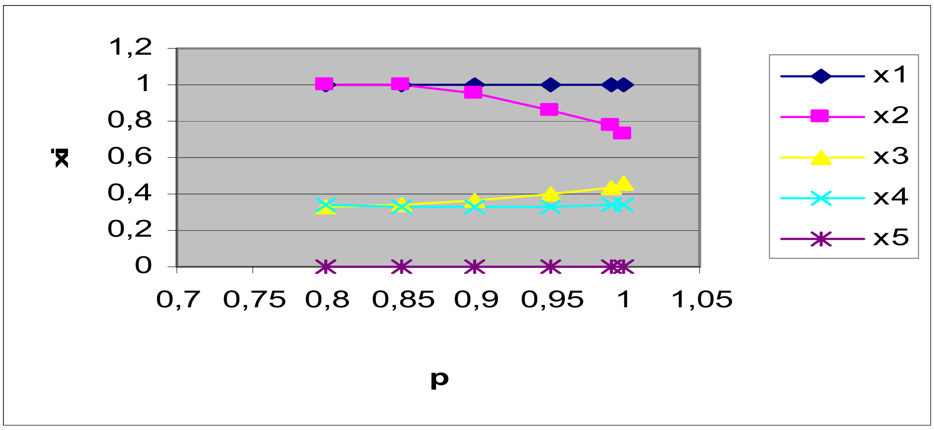

Рис. 5. *Зависимость оптимальной стратегии от доверительной вероятности p*

На рис. 6 представлена зависимость нижней границы прибыли W от доверительной вероятности при различных вариациях.

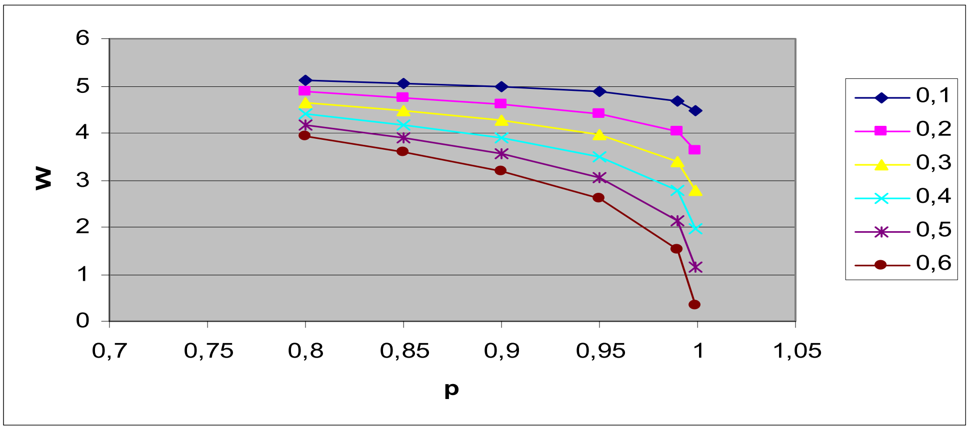

Рис. 6. *Зависимость нижней границы прибыли от доверительной вероятности p*

При решении этого примера задачи инвестирования исследовалась зависимость решения стохастической задачи от доверительной вероятности, вариации и тенденции его изменения. Результаты показали, что оптимальные стратегии инвестирования, получаемые в результате решения детерминированной и стохастической задач, не отличаются или отличаются незначительно, если изменения доверительной вероятности и инвестируемых средств невелики.

4. ВЫВОДЫ

1. Ранжирование проектов по прибыльности осуществляется на основании отношений $\gamma_i = \dfrac{\overline{a}_i}{c_i}$. То есть $P_{ij} \succ P_{kj-1} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{a}_i}{c_i} > \dfrac{\overline{a}_k}{c_k}$. Если $\gamma_i = \gamma_k$, то проекты считаем эквивалентными, $P_i \sim P_k$.

2. При фиксированной величине инвестируемых средств C, принадлежащей интервалу $(C_{k-1}; C_k)$, оптимальное значение $\overline{x_k}$ будет удовлетворять неравенствам $0 < \overline{x_k} < 1$; если $P_l \succ P_k$, то оптимальное значение $\overline{x_l} = 1$, и оптимальное $\overline{x_n} = 0$, когда $P_n \prec P_k$. Тогда допустимые интервалы изменения коэффициентов $\overline{a_i}$ $(\underline{\underline{a_i}} \le \overline{a}_i \le \overline{\overline{a_i}})$ можно получить следующим образом:

$$\underline{\underline{a_k}} = \gamma_{k-1} c_k , \; \overline{\overline{a_k}} = \gamma_{k+1} c_k ,$$

$$\underline{\underline{a_i}} = \lambda_k c_l , \; \overline{\overline{a_i}} = +\infty , \text{ если } \overline{x_l} = 1 ,$$

$$\underline{\underline{a_n}} = -\infty , \; \overline{\overline{a_n}} = \gamma_k c_n , \text{ если } \overline{x_n} = 0 .$$

3. В решении параметрической задачи (2) коэффициенты зависимости средней прибыли от $t \in (C_{i-1}; C_i)$

$$V_i = b_i t + d_i$$

равны: $b_i = \gamma_i = \overline{y}$ и $d_i = \sum_{i=1}^{m} \overline{z}_i$, где $\overline{y}$ и $\overline{z_i}$ являются оптимальными значениями переменных y и z_i двойственной задачи линейного программирования (6), если C удовлетворяет неравенства $C_{i-1} < C < C_i$. Это утверждение верно для всех $i = 1, 2, ..., m$.

4. В результате анализа чувствительности решения задачи (8) получены допустимые пределы изменения коэффициентов эффективности (когда оптимальная стратегия инвестирования остаётся той же, $\overline{x_i} = 1$, $0 < \overline{x_k} < 1$, $\overline{x_n} = 0$):

$$\underline{g_i} = \gamma_k, \ \overline{g_i} = +\infty, \ \underline{g_n} = -\infty, \ \overline{g_n} = \gamma_k, \ \underline{g_k} = \gamma_{k-1}, \ \overline{g_k} = \gamma_{k+1}.$$

5. Интервалы ($\underline{c_i}$; $\overline{c_i}$), в которых могут изменяться величина средств для финансирования проектов, таковы:

$$\underline{c_i} = \frac{\overline{a}_i}{\gamma_k} \text{ и } \overline{c_i} = +\infty, \text{ если } \overline{x_i} = 1, \ 0 < \overline{x_k} < 1,$$

$$\underline{c_n} = -\infty \text{ и } \overline{c_n} = \frac{\overline{a}_n}{\gamma_k}, \text{ если } 0 < \overline{x_k} < 1, \ \overline{x_n} = 0,$$

$$\underline{c_k} = \frac{\overline{a}_k}{\gamma_{k+1}} \text{ и } \overline{c_k} = \frac{\overline{a}_k}{\gamma_{k-1}}, \text{ если } 0 < \overline{x_k} < 1.$$

6. Стохастические задачи (11) и (12) взаимосвязаны в том смысле, что

$$W_1 = W_2 \ \Leftrightarrow \ p_2 = p_1.$$

Литература

[1] Таха Хэмди. А. *Введение в исследование операций.* М.: Вильямс, 2001.

[2] Vakrinienė Sigutė, Čyras Petras. Investigation of the Efficiency of Labour Safety Means by Statistical Games, *Journal of civil engineering and management,* Vol. VIII, No 3, 2002, pp. 192-196.

[3] Vakrinienė Sigutė, Čyras Petras, Optimalus lėšų, skirtų darbų saugos priemonėms, paskirstymas naudojant stochastinį programavimą, *Lietuvos matematikos rinkinys,* T. 42, Nr.1, 2002, pp. 591-596.

[4] Vakrinienė Sigutė, Čyras Petras, Šukys Ritaldas. Subjection of Optimal Injury Prevention Strategy to Variation of Reliability and Injury Prevention Costs. *The 8th Innternational conference " Modern building materials, structures and techniques": selected papers*. Vilnius, Technika, 2004, 990-995.

[5] Arnoldina Pabedinskaitė, Sigutė Vakrinienė. Modelling of Investment Strategy. *Scientific proceedings of the the scientific-technical union of mechanical engineering,* Jan XII, Vol. 2(80), 2005, pp. 298-301.