

НАДЁЖНОСТЬ ПЛАНОВЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СПРОСА

Арнольдина Пабединскайте

*Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса
Факультет управления предпринимательством
ул. Саулетекио, 11, Вильнюс, Литва
E-mail: arna@yv.vtu.lt*

Оптимальное планирование в условиях неполной информации является одной из актуальных задач управления. Для практики планирования типична ситуация, когда неопределенность имеет место не только в момент составления плана, но сохраняется и во время выполнения планового решения. Это связано с тем, что принимаемое стратегическое плановое решение затрагивает длительный промежуток времени, и к моменту начала его реализации неполная определенность будущей ситуации сохраняется. Формализация постановки задачи оптимального планирования в условиях неполной определенности приводит к вероятностной концепции гарантии осуществимости плана и к требованию выполнения ограничений с вероятностью не ниже заданной. Эту величину можно интерпретировать как надежность принимаемого планового решения. Главным источником неопределенности, как правило, является величина спроса на продукцию. Естественно вид вероятностного распределения и его численные характеристики оказывают влияние на надёжность плановых решений. Для определения оптимального планового решения нет необходимости точного знания вида вероятностного распределения, так как достаточно задать интервалы изменения величины спроса с соответствующими вероятностями. Однако, предполагая конкретный вид вероятностного распределения, возможно получить аналитическую зависимость оптимального значения целевой функции задачи от уровня неопределенности.

Ключевые слова: математическое моделирование, надёжность плановых решений, неопределённость информации

1. ВВЕДЕНИЕ

Характерная для задач управления неполная определенность информации при математическом моделировании реальной ситуации может учитываться различными способами: введением в формулировку задачи вероятностей выполнения отдельных ресурсных ограничений (считая, что отдельные ограничения независимы, так как ресурсы невзаимозаменяемы), заданием вероятности выполнения всего комплекса ограничений (если ресурсы могут в какой-то степени быть взаимозаменяемы), формулировкой целевой функции в виде математического ожидания некоторой функции или введением в целевую функцию различных штрафных коэффициентов за невыполнение ограничений и т.д. [1-7]. Для практики планирования типична ситуация, когда неопределенность информации имеет место не только в момент составления плана, но сохраняется и во время выполнения планового решения. Это связано с тем, что принимаемое плановое решение затрагивает некоторый промежуток времени, и к моменту начала его реализации неполная определенность будущей ситуации не исчезает. Формализация постановки задачи оптимального планирования в условиях неполной определенности приводит к вероятностной концепции гарантии осуществимости плана и к требованию выполнения ограничений с вероятностью не ниже заданной:

$$P\{g(x, \omega) \leq 0\} \geq 1 - \gamma, \quad (1)$$

где x – вектор управляемых переменных, ω – вектор неопределенных параметров. Наличие неопределенности в условиях реализации планового решения вносит в принимаемое плановое решение элемент риска, причем параметр γ численно выражает значение риска. Величину $\alpha = 1 - \gamma$ соответственно можно интерпретировать как надежность принимаемого планового решения. Решение оптимизационной задачи с ограничениями вида (1) существенным образом зависит от уровня надежности, заложенного при формулировке задачи [8]. Увеличение уровня плановой надежности, т.е. требование выполнения ресурсных ограничений с большей

вероятностью, связано, как правило, с ростом затрат на резервирование ресурсов. Уменьшение уровня плановой надежности, т.е. увеличение риска невыполнения производственной программы, приводит к отрицательным последствиям как экономического, так и административного характера. Это ставит закономерный вопрос о рациональном выборе требований к уровню надежности и риска при подготовке плановых решений.

При определении этого уровня целесообразно исходить из экономических соображений. Наибольший опыт накоплен в расчетах экономически рационального уровня надежности технических устройств и систем. Повышение уровня надежности требует увеличения затрат на разработку и изготовление технических устройств, с другой стороны, более надежная аппаратура требует меньших затрат во время эксплуатации. Следовательно, существует некоторое оптимальное значение уровня надежности, при котором общая стоимость разработки, изготовления и эксплуатации минимальна. Долгое время экономической стороне проблемы надежности не уделялось должного внимания. Однако необходимость мероприятий по повышению надежности аппаратуры вытекает из стоимости отказов ненадежной аппаратуры. Причем стоимость отказов обуславливается не только потерями рабочего времени на ремонт и стоимостью замененных деталей, но и увеличением объема работ по уходу за аппаратурой, необходимостью иметь большее число запасных деталей и другими последствиями.

Затраты на надежность могут быть высокими, однако стоимость ненадежности еще более высока, поэтому очень важно определить, какой уровень надежности необходим. С экономической точки зрения, надежность становится ограничивающим фактором по отношению к эффективности на единицу вложенных средств. Для определения оптимального уровня надежности необходим анализ потерь от выпуска недолговечной и ненадежной продукции, содержания резервов, а также экономического эффекта от повышения долговечности и надежности оборудования. При использовании машин с недостаточной надежностью и долговечностью возникают потери, к которым относятся: дополнительные капитальные вложения на увеличение парка машин для изготовления заданного годового объема продукции; повышение эксплуатационных издержек; потери от нарушения производственного ритма и простоев и других перерывов в ходе производственного процесса. Во многих случаях эти потери имеют цепной характер, распространяясь по вертикали на несколько смежных предприятий и отраслей-потребителей.

Надежность производственной системы зависит от большого числа факторов. К таким факторам относятся, прежде всего, количество, взаимосвязи и надежность элементов, из которых состоит система. Исследование влияния этих факторов на надежность, разработка методов количественного измерения надежности организационно-экономических систем составляет первое направление при решении проблемы. Второе направление связано с определением необходимой или требуемой надежности экономических систем. Достаточно сложно определить однозначно и само понятие надежности производственной системы. В литературе встречаются различные подходы к этому вопросу. Надежность функционирования системы управления производством можно понимать как вероятность выработки и реализации мероприятий, обеспечивающих достижение объектом управления заданного результата. Надежность управляющей системы можно понимать и качественно, как ее способность удовлетворительно выполнять функции, т.е. принимать допустимые решения в течение всего периода деятельности.

Используемые в практике планирования экономических систем оценки качества плана можно рассматривать как показатели потенциальной надежности организационно-экономической системы, которая затем реализуется (полностью или частично) в процессе хозяйственной деятельности.

2. ОПТИМАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ НАДЕЖНОСТИ ПЛАНОВЫХ РЕШЕНИЙ

В организационно-экономических системах, последствия надежности которых могут быть выражены материальным ущербом, для оценки мероприятий по повышению надежности целесообразно использовать экономический критерий, а оптимальным следует считать такой уровень надежности, который обеспечивает максимум экономической эффективности системы.

Основой для решения этой задачи является нахождение оптимального соотношения между затратами на повышение надежности и величиной ущерба от недостаточной надежности исследуемой организационно-экономической системы.

Для определения требований к надежности по экономическому критерию необходимо установить зависимость затрат и величины ущерба от уровня надежности системы.

В литературе рассматриваются два способа установления связи уровня надежности технического устройства с затратами, необходимыми для его достижения.

Первый способ основан на анализе характера изменения калькуляционных статей затрат в зависимости от мероприятий по увеличению надежности. Этот способ дает возможность глубокого экономического анализа зависимости отдельных составляющих общих суммарных затрат от уровня надежности для конкретных устройств и систем, но является сложным и трудоемким.

Вторым способом является применение обобщенного, аналитического выражения зависимости затрат от уровня надежности. Процесс повышения надежности в каждом случае зависит от множества различных факторов, которые трудно, а порой и вовсе невозможно определить. Однако все способы повышения надежности находят выражение в стоимости изделия повышенной надежности. Поэтому в экономико-математических исследованиях возможно, абстрагируясь от конкретных способов повышения надежности, применять математические модели для описания зависимости стоимости от уровня надежности технических устройств и организационных систем.

В литературе встречаются следующие функции, используемые для описания зависимости затрат на создание устройства повышенной надежности:

$$C = C_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^a, \quad (2)$$

$$C = C_0 \frac{Q_0}{Q} e^{-c(Q-Q_0)}, \quad (3)$$

$$C = C_0 \frac{1-P_0}{P_0} \frac{P}{1-P}, \quad (4)$$

$$C = C_0 \left(1 + c \ln \frac{\lambda_0}{\lambda} \right), \quad (5)$$

$$C = C_0 \left(1 + c \ln \frac{Q_0}{Q} \right), \quad (6)$$

$$C = C_0 \frac{\ln P_0}{\ln P} \left(\frac{P}{P_0} \right)^d, \quad (7)$$

$$C = \frac{A}{(1-P^a)^b}, \quad (8)$$

где $Q = 1 - P$, а коэффициенты A, a, b, c, d определяются на основании производственного опыта и характеризуют эффективность вложения средств на повышение надежности. Эти коэффициенты в моделях должны выбираться так, чтобы наилучшим образом аппроксимировать реальную зависимость стоимости от надежности. Дополнительные затраты, определяющие эту реальную характеристику, зависят от разработанности способов повышения надежности данного изделия и от потенциальных возможностей наиболее эффективного применения этих способов на конкретном предприятии.

С другой стороны, для оценки экономической эффективности повышения уровня надежности необходимо оценить зависимость целевой отдачи технического устройства или системы от уровня его надежности. Как уже отмечалось, затраты на создание устройства

повышенной надежности необходимо сравнивать с потерями, связанными с недостаточным уровнем надежности. Потери из-за простоев, ошибок в работе и т.д., особенно для устройств, являющихся частью комплексных управляющих систем, могут быть очень велики.

Из всех экономических показателей, связанных с надежностью, наиболее трудно оценить ущерб у потребителя. Принято ущерб разделять на две составные части:

1. Прямой (непосредственный) ущерб;
2. Дополнительный ущерб или потери от простоя.

Первая составляющая включает затраты, связанные с простоем рабочей силы, браком продукции, порчей сырья, расстройством технологического процесса, стоимость восстановления после отказов технического устройства.

Вторая составляющая определяется величиной дохода, теряемого предприятием.

Большинство работ не рассматривают ущерб от поломки оборудования, порчи сырья и материалов, нарушений технологического процесса, а оценивают только затраты, связанные с восстановлением технического устройства или системы после отказов, однако, некоторые авторы отмечают необходимость учета и этих составляющих. Они предлагают принимать чистый доход (прибыль), утраченный предприятием, в качестве величины ущерба от простоя машины. Так как на каждой единице продукции, невыработанной из-за простоев машины (системы), предприятие не несет связанных с ее изготовлением переменных расходов, то ущерб, обусловленный невыработкой продукции, можно определить следующим образом:

$$u = (z - \omega_{\text{неп}})q. \quad (9)$$

Здесь q означает объем невыработанной из-за простоев оборудования продукции за единицу времени, для которой вычисляется величина потерь, например, за год. Большинство авторов определяют величину потерь на основе расчета суммарной продолжительности простоев в течение года посредством такого показателя ремонтпригодности, как время ее восстановления, либо вводят в рассмотрение среднюю величину потерь в единицу времени простоя.

Исследуем зависимость затрат на повышение надежности производственной системы и издержек, обусловленных недостаточной надежностью системы, от уровня надежности.

3. ЗАТРАТЫ НА ПОВЫШЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ

Надежность плановых решений может быть повышена за счет совершенствования управления, его организационных структур, повышения надежности машин и механизмов или в результате резервирования производственных мощностей. В большинстве случаев требуемый уровень надежности не может быть достигнут без резервирования, так как повышение надежности обычно связано с введением избыточности в той или иной форме. Резервирование необходимо для компенсации неравномерности и случайных колебаний спроса, случайных возмущений в процессе производства и является эффективным мероприятием, так как значительно повышает надежность функционирования экономической системы. Можно считать, что основная часть затрат на повышение надежности функционирования экономических систем определяется затратами, связанными с наличием резервов. Речь идет, естественно, о величине резерва производственных мощностей, выраженной в единицах измерения продукции, или капитала.

Под резервами производственных мощностей понимаются сознательно планируемые компоненты производственных мощностей организационно-экономической системы, периодически вовлекаемые в производство для обеспечения более качественного (надежного, своевременного и т.д.) выполнения заданной изменяющейся во времени производственной программы. Резервные производственные мощности предназначены для покрытия плановой неравномерности и удовлетворения непредвиденных потребностей.

Неопределенность в условиях функционирования при перспективном планировании проявляется в неопределенности спроса на продукцию. В рассматриваемой ниже модели неопределенность спроса на продукцию описывается при помощи вероятностного распределения с некоторым математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 .

В том случае, когда величина имеющихся производственных мощностей M совпадает со средним значением спроса m , резерв отсутствует и вероятность удовлетворения спроса на продукцию равна 0,5. Затраты на обеспечение такого уровня надежности определяются затратами на поддержание имеющихся производственных мощностей.

Затраты, связанные с наличием резервных производственных мощностей, можно записать в виде:

$$\varphi_1(\alpha) = r R, \quad (10)$$

где R – величина резерва, r – издержки от наличия единицы резервных мощностей.

Величина резерва производственных мощностей R в (10) зависит от характеристик вероятностного распределения спроса на продукцию и требуемого уровня надежности. В случае *нормального закона распределения спроса* величина резервных мощностей, определяемая из условия $P\{Q < m + R\} = \alpha$, выражается формулой

$$R = \Phi^{-1}(\alpha) \sigma, \quad (11)$$

где $\Phi(\alpha)$ – функция распределения нормального закона,
 σ – среднее квадратическое отклонение спроса.

Таким образом, затраты, связанные с наличием резервных мощностей, равны

$$\varphi_1(\alpha) = r \sigma \Phi^{-1}(\alpha). \quad (12)$$

В практике планирования встречаются и другие, кроме нормального, вероятностные распределения спроса на продукцию. В том случае, например, когда количество новых потребителей на продукцию отрасли, характеризуемых объемом ежегодного спроса, представляет собой пуассоновский поток некоторой постоянной интенсивности, спрос будет описываться экспоненциальным распределением. Интересно исследовать также случай равномерного распределения в некотором интервале, когда нет оснований (или, точнее, информации) для более избирательного предсказания величины спроса. Определим величину необходимого для обеспечения надежности резерва производственных мощностей для равномерного и экспоненциального распределений спроса.

В том случае, когда распределение спроса является *равномерным*, то есть величины спроса на продукцию из интервала (Q_{min}, Q_{max}) равновероятны, величина резервных мощностей зависит от уровня надежности α следующим образом:

$$R = (\alpha - 1/2)(Q_{min} - Q_{max}). \quad (13)$$

Как и в случае нормального распределения спроса, величина резерва R выводится из условия $P\{Q < m + R\} = \alpha$, которое для равномерного распределения дает выражение (13).

Из этой формулы следует, что при равномерном распределении величина резерва прямо пропорциональна разности между максимально и минимально возможным спросом.

В случае *экспоненциального распределения* колебаний опроса от среднеожидаемого величина резерва производственных мощностей, удовлетворяющая условию $P\{Q < m + R\} = \alpha$ будет равна

$$R = -q \ln 2 (1 - \alpha), \quad (14)$$

где $\lambda = 1/q$ – параметр экспоненциального распределения.

4. ПОТЕРИ ОТ НЕДОСТАТОЧНОЙ НАДЕЖНОСТИ

Для организационно-экономических систем ненадежность выполнения заданных функций означает падение эффективности. Экономическая эффективность производственной системы отражает достигнутый уровень организованности и степени использования производственных ресурсов (рабочая сила, средства, предметы труда, информация) и измеряется отношением полученного системой результата к затратам при данной надежности ее функционирования.

Рост надежности, повышение качества плановых решений должны вести к увеличению результата производства и снижению затрат производственных ресурсов, т.е. к возрастанию экономической эффективности производственной системы.

Значение экономического аспекта надежности как технических, так и организационных систем обусловлена тем, что под влиянием надежности находится объем выполненной работы, эффективность функционирования рассматриваемых систем. Для многих видов сложных систем значение проблемы надежности объясняется также высокой стоимостью технических систем и большими экономическими потерями от ненадежности. Игнорирование характеристики надежности приводит к ошибочному представлению о фактическом уровне производительности труда и факторах его роста.

Учет уровня надежности позволяет объективно оценить реальные возможности машин, механизмов, технических систем или производственных систем в целом. Производительность машин и объем выполняемой производственной системой работы прямо пропорциональны не только основным техническим характеристикам, но и уровню надежности. Чем выше надежность, тем больше объем выполненной полезной работы. При уровне надежности α величина сокращения объема полезной работы из-за недостаточной надежности с некоторым упрощением может быть определена так:

$$N = (1 - \alpha) M, \tag{15}$$

где M – величина производственных мощностей. Тогда ущерб, обусловленный недостаточной надежностью, можно выразить формулой

$$\varphi_2(\alpha) = l(1 - \alpha)M, \tag{16}$$

где l – удельный ущерб, т.е. ущерб от невыполнения единицы объема полезной работы.

Вообще говоря, l зависит от α , и следует ожидать нарастающего ущерба с убыванием надежности. Каждая следующая невыполненная единица задания приносит больший ущерб, чем предыдущая, так как увеличивается круг производственных связей, на которых отражаются экономические последствия ненадежности. Кроме того, при небольших отклонениях от плановых заданий легче найти восполняющую замену, в то время как с возрастанием величины невыполненного задания возможности замены и маневра уменьшаются.

Можно предположить в самом простом случае, что удельный ущерб с убыванием надежности пропорционально возрастает, то есть имеет место зависимость

$$l(\alpha) = a N = a(1 - \alpha)M. \tag{17}$$

Коэффициент a определим из условия, что при $\alpha = 0,5$ $l(\alpha) = k_0$, где k_0 – некоторая заданная начальная величина удельного ущерба. Такой начальной величиной может служить оценка реальной величины удельного ущерба.

В том случае, когда удельный ущерб является функцией, а не константой, полный ущерб вычисляется интегрированием. Ущерб от недостаточной надежности при уровне надежности α равен

$$\varphi_2(\alpha) = k_0(\alpha^2 - 2\alpha + 1)M. \tag{18}$$

5. РАСЧЁТ ОПТИМАЛЬНОГО УРОВНЯ НАДЕЖНОСТИ

В соответствии с (12), (18) при *нормальном распределении спроса* общие затраты повышения надежности плановых решений и обусловленные недостаточной надежностью будут равны:

$$\Pi(\alpha) = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) = r \sigma \Phi^{-1}(\alpha) + k(\alpha^2 - 2\alpha + 1)M. \tag{19}$$

Оптимальным уровнем надежности будет такое α , при котором достигается минимум суммарных затрат $\Pi(\alpha)$. Приравнявая нулю первую производную по α выражения (19), найдем уравнение для определения оптимальной величины α^{opt} .

$$\Phi'(x) = \frac{r\sigma}{2kM(1-\alpha)}, \quad (20)$$

где x и α связаны соотношением $\Phi(x) = \alpha$.

При определении оптимального уровня надежности исходные производственные мощности M являются некоторой известной фиксированной величиной. Как видно из уравнения (20), оптимальное значение уровня надежности α^{opt} определяется соотношением трех величин: коэффициента ущерба k , коэффициента резервирования r и среднеквадратического отклонения σ , причем коэффициенты k и r входят в уравнение только в виде отношения.

В случае *равномерного распределения спроса* общие приведенные затраты повышения надежности плановых решений и обусловленные недостаточной надежностью согласно (13) и (18) будут равны

$$\Pi(\alpha) = r(\alpha - 1/2)(Q_{max} - Q_{min}) + kM(\alpha^2 - 2\alpha + 1). \quad (21)$$

Отсюда

$$\frac{d\Pi}{d\alpha} \equiv r(Q_{max} - Q_{min}) + kM(2\alpha - 2), \quad (22)$$

а уравнение для расчета оптимальной величины α^{opt} имеет вид:

$$r(Q_{max} - Q_{min}) + kM(2\alpha - 2) = 0. \quad (23)$$

В результате получаем

$$\alpha^{opt} = 1 - \frac{r(Q_{max} - Q_{min})}{2kM}. \quad (24)$$

В случае *экспоненциального распределения колебаний спроса* от средней величины общие приведенные затраты повышения надежности плановых решений и обусловленные недостаточной надежностью согласно (14), (18) будут равны

$$\Pi(\alpha) = -rq \ln 2 (1 - \alpha) + kM(\alpha^2 - 2\alpha + 1). \quad (25)$$

Приравнивая к нулю первую производную по α , получаем

$$rq \frac{1}{1-\alpha} + kM(2\alpha - 1) = 0, \quad (26)$$

откуда

$$(\alpha - 1)^2 = \frac{rq}{2kM}, \quad (27)$$

или

$$\alpha^{opt} = 1 - \sqrt{\frac{rq}{2kM}}. \quad (28)$$

В данном случае оптимальный уровень надежности зависит от коэффициента $c = \frac{k}{r}$ и параметра q .

6. ВЫВОДЫ

1. Анализ полученных результатов при различных вероятностных определениях спроса показывает, что оптимальный уровень надежности α^{opt} определяется соотношением: с одной стороны, величины коэффициента c , характеризующего отношение удельного ущерба из-за ненадежности и удельных затрат на повышение надежности, а с другой стороны, показателя, характеризующего разброс возможных значений спроса (среднее квадратическое отклонение для нормального распределения, разность $Q_{max} - Q_{min}$ для равномерного распределения и параметр q для экспоненциального распределения). При возрастании коэффициента c величина оптимального уровня надежности α^{opt} также возрастает. При возрастании характеристики разброса оптимальные значения α^{opt} уменьшаются. Полученная зависимость оптимального уровня надежности и соответствующей величины резерва от характеристики разброса дает возможность численно оценить последствия уменьшения дисперсии, то есть эффективность более точного прогнозирования спроса на продукцию срасли.

2. Анализ динамики оптимального уровня надежности при различных законах распределения спроса показывает, что наиболее резко (или круто) меняется α^{opt} при изменении c для равномерного закона распределения. Для экспоненциального закона распределения зависимость α^{opt} от c наиболее плавная. Соответствующие данные для нормального закона распределения занимают промежуточное положение.

3. Интересно отметить, что возрастание α^{opt} от уровня 0,5 для экспоненциального распределения происходит при меньшем значении коэффициента c , чем для нормального и равномерного распределения. Величина этого, можно сказать критического значения коэффициента c , зависит также от характеристики разброса σ , упомянутая закономерность остается в силе, то есть при экспоненциальном распределении спроса скорее проявляется зависимость величин ущерба от ненадежности и затрат на повышение надежности.

Литература

- [1] Yates J. Frank. *How to Assure Better Decisions in Your Company*. Yossey-Bass, 2003.
- [2] Tale M., Dispenza V., Flynn J., Currie D. *Management Decision Making. Towards an Integrative Approach*. Prentice Hall, 2003.
- [3] Lucey T. *Quantitative Techniques* London: DP Publications Ltd, 1992. 531 p.
- [4] Stevenson W.J. *Production/Operations Management*. Boston: Homewood Irwin, 1990.
- [5] Moor J.H., Weatherford L.R. *Decision Modeling with Microsoft Excel*. Prentice Hall, 2001
- [6] Curwin J., Slater R. *Quantitative Methods for Business Decisions*. Thomson, 2002.
- [7] Dillworth J.B. *Production and Operations Management: Manufacturing and Services*. New York: McGraw Hill, 1993.
- [8] Пабединская А. Согласование надёжности плановых решений на двух уровнях, *Transport and Telecommunication*, 6(3), 2005, 355-361.