



PLIENINIŲ RĖMŲ SKERSPJŪVIŲ OPTIMIZACIJOS UŽDAVINYS, ĮVERTINANT NETAMPRIĄSIAS DEFORMACIJAS IR EKSPLOATACINIUS APRIBOJIMUS

Romanas Karkauskas¹, Juozas Nagevičius²

Statybinės mechanikos katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,

Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva

El. paštas: ¹rokark@st.vtu.lt; ²juozas.nagevicius@adm.vtu.lt

Įteikta 2006-11-20; priimta 2007-02-15

Santrauka. Pateikiamas patobulintas plieninių rėmų strypų skerspjūvių optimizacijos uždavinio matematinis modelis ir skaičiavimo algoritmas, įvertinantis medžiagos netampriąsias savybes ir eksploatacinius reikalavimus. Disipacinių savybių įvertinimas, naudojant netampriąsias plieno deformacijas, lemia reikšmingą laikomosios galios rezervo sumažinimą optimalios tamprios būklės konstrukcijos atžvilgiu. Eksploataciniai reikalavimai, keliami konstrukcijai jos naudojimo laikotarpiu, apima ne tik stiprumo, bet ir deformatyvumo, stabilumo ir konstrukcinius apribojimus. Jie apibrėžia minimalius skerspjūvių parametrus ir elementų ribinius liaunius. Visa tai riboja laisvą plastinių deformacijų plitimą, todėl optimali konstrukcija yra neįramoji tamprioji plastinė. Naudojami tampraus atsako dydžiai funkcinio ryšio tarp standartinių profilių skerspjūvių optimizuojamų parametrų, todėl uždavinys sprendžiamas iteracijų būdu. Pateikta apribojimų dydžių ir pradinių parametrų parinkimo strategija kryptingam iteracijų proceso valdymui užtikrina sėkmingą uždavinio konvergenciją. Atliktas 10 aukštų rėmo, naudojant standartinius profilius, optimizacijos skaitinis eksperimentas.

Reikšminiai žodžiai: optimizacija, netampriosios deformacijos, tamprioji plastinė konstrukcija, eksploataciniai apribojimai.

OPTIMISATION OF STEEL FRAME CONSIDERING INELASTIC STRAINS AND MAINTENANCE REQUIREMENTS

Romanas Karkauskas¹, Juozas Nagevičius²

Dept of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University,

Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania

E-mail: ¹rokark@st.vtu.lt; ²juozas.nagevicius@adm.vtu.lt

Received 20 November 2006; accepted 15 February 2007

Abstract. A developed mathematical model and calculation algorithm for steel frame cross-sectional optimisation taking into account inelastic strains and maintenance requirements are presented. An evaluation of dissipative features when employing inelastic steel strains results in a significant reduction of frame carrying capacity versus its elastic response. The maintenance requirements of structure involve not only strength but also the stiffness, stability and structural constraints. The latter ones define the minimum cross-sectional and slenderness values of members. The above-mentioned factors restrict a free development of plastic strains, thus an optimal structure is in a state prior to plastic failure. The employed values of structural elastic response are functionally related to the optimised parameters, therefore the problem is solved iteratively. A strategy of choosing the limiting and that of starting parameters to handle iterative process ensures a successful problem convergence. A numerical experiment of 10-storey steel frame optimisation by standard profiles is presented.

Keywords: optimisation, inelastic strains, elastic-plastic structure, maintenance requirements.

1. Įvadas

Konstrukcijos optimizacijos pagrindinis tikslas – sukurti optimalią konstrukciją, kurios elgsena nuo įvairių išorinių poveikių veikimo tenkintų ribinius saugos ir tinkamumo būvio reikalavimus.

Pastaruosius tris dešimtmečius gana intensyviai buvo plėtojama konstrukcijų optimizacijos teorija, metodai ir skaičiavimo algoritmai bei jų integracija su šiuolaikinėmis kompiuterinio modeliavimo ir automatizuoto projektavimo sistemomis [1–9]. Pažymėtina, kad einamuoju metu pasirodė darbai, kuriuose taikomi genetiniai algoritmai, pagrįsti biologinių principų įdiegimu į konstrukcijų optimizacijos problemų realizacijos kompiuterines technologijas [4, 7, 8]. Patrauklusis šių algoritmų bruožas yra jų suderinamumas su diskretine optimizacija, jie nereikalauja projektuotojų nemėgstamų funkcijų išvestinių, kurios labai plačiai taikomos klasikiniuose optimizacijos metoduose.

Atliktų darbų analizė leidžia teigti, kad konstrukcijų optimizacijos metodika, kurioje vienu metu taikoma matematinio programavimo teorija, ekstreminiai energiniai principai ir medžiagos netampriosios savybės yra viena iš efektyviausių [1, 6, 9–14]. Čia medžiagos plastiškųjų savybių įvertinimas daug tiksliau parodo konstrukcijos darbą įvairiais apkrovimo etapais ir leidžia sukurti gerokai racionalesnį projektą [9–19]. Verta pabrėžti, kad dauguma atliktų darbų yra pagrįsti ribinės pusiausvyros teorijos prielaidomis [6, 9, 16, 17, 19]. Dėl šios priežasties gauti optimalūs konstrukcijų projektai patenkina tik stiprumo kriterijus, tenkinančius saugos būvį. Būtina pažymėti, kad optimizacijos rezultatai pagal plastiškojo suirimo kriterijų ne visuomet yra lemiami, nes optimalios konstrukcijos ribinis tinkamumo būvis gali būti prarastas net ir nepasiekus plastiškos suirties dėl per didelių netampriųjų deformacijų ir jas lydinčių poslinkių atsiradimo. Be to, optimizacijos uždavinio apribojimų sąlygos dažniausiai yra formuluojamos, neatsižvelgiant į Statybos techninio reglamento [20] reikalavimus ir dėl to optimalios konstrukcijos standumas neužtikrina normalaus jos funkcionavimo.

Šios priežastys riboja ribinės pusiausvyros teorijos praktinį taikymą rengiant optimalius konstrukcijų projektus. Todėl konstrukcijos deformuoto būvio parametrų įvertinimas yra būtinas optimizacijos uždavinių matematiniuose modeliuose. Deformatyvumo apribojimai nusako rėmo mazgų ar atskirų dalių poslinkių ribas, konstrukciniai – minimalius skerspjūvių parametrus, strypų ribinius liaunius etc. Nėra abejonių, kad konstrukcijos optimizacija, įvertinant šiuos visus reikalavimus ir plieno netampriąsias savybes, yra vienas svarbiausių optimalaus projektavimo uždavinių.

Šių tyrinėjimų tikslas:

- plieninių konstrukcijų (rėmų) optimizacijos uždavinių matematinių modelių ir skaičiavimo algoritmų tobulinimas, įvertinant plieno netampriąsias sa-

vybes ir eksploatacinius reikalavimus (stiprumo, deformatyvumo, stabilumo, konstrukcinius, etc. apribojimus);

- optimizacijos uždavinių skaitinės realizacijos aspektų analizė.

Siūloma metodika yra iliustruojama 10 aukštų laisvojo plieninio rėmo, veikiamo vertikalių ir horizontalių jėgų, skaičiavimu. Optimizacija atliekama, turint omenyje funkcines priklausomybes tarp skerspjūvio parametrų, tinkančias dvitėjų standartinių profilių sijoms.

2. Matematinis modelis

Plieninio rėmo optimizacijos uždavinys yra formuluojamas taip: žinant rėmo konfigūraciją ir išorines jėgas, reikia rasti tokį strypų skerspjūvių plotų A (ribinių lenkimo momentų M_0) pasiskirstymą, kuris tenkintų minimalaus tūrio konstrukcijos optimalumo kriterijų, kai atskiri jos elementai patiria netampriąsias deformacijas. Čia optimizacijos uždavinio eksploataciniai apribojimai turi apimti visų pirma sąlygas, apibūdinančias konstrukcijos tikrąjį įtempių-deformacijų būvį. Tokios sąlygos visų pirma yra apibendrinto Lagranžo uždavinio priklausomybės. Šiuo atveju jos gautos remiantis papildomo deformavimo energijos minimumo principu suformuluotos dualių ekstremumo uždavinių poros visų apribojimų bei Kuno ir Takerio sąlygų. Antra, konstrukcijos deformatyvumo sąlygoms užtikrinti taikomi rėmo poslinkių apribojimai tam tikrose konstrukcijos vietose tam tikromis kryptimis: $u^- \leq (u_r + u_e) \leq u^+$; čia $u^+ > 0$ ir $u^- < 0$ – poslinkių viršutinių ir apatinių ribų normatyvinės reikšmės. Be šių būtinų sąlygų galimi ir kitokio pobūdžio norminiuose dokumentuose apibrėžti technologiniai ar konstrukciniai reikalavimai elementų stabilumui ar ribinių lenkimo momentų žemutinei kitimo ribai $M_0^{\min}$. Tai riboja laisvą plieno netamprių deformacijų plitimą, todėl optimalios konstrukcijos elementuose atsiranda ir tampriosios, ir netampriosios (plastiškos) deformacijos, sukeliamos liekamųjų dydžių S_r ir u_r . Jei šie apribojimai yra griežti, tai konstrukcija dar iki plastiškosios iirties pasiekia ribinius būvius.

Tokiu būdu rėmo optimizacijos uždavinio, jungiančio stiprumo, standumo ir eksploatacinius apribojimus, matematinis modelis BEM terminologijoje bus toks ([9, 13]):

$$\text{rasti} \quad L^T M_0 \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\text{kai} \quad [B]M_0 - [\Phi]S_r \geq [\Phi]S_e, \quad (2)$$

$$[A]S_r = 0, \quad (3)$$

$$[D]S_r + [\Phi]^T \lambda - [A]^T u_r = 0, \quad (4)$$

$$\lambda^T ([B]M_0 - [\Phi](S_r + S_e)) = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad (5)$$

$$u^- \leq [P](u_r + u_e) \leq u^+, \quad (6)$$

$$M_0 \geq M_0^{\min}, \quad (7)$$

čia: $[A] = [C]^T [\bar{A}]$ – yra konstrukcijos diskrečiojo modelio pusiausvyros lygčių koeficientų matrica, kurios išraiška priklauso nuo nagrinėjamos konstrukcijos tipo ir kraštinių sąlygų, apibūdinamų tam tikra prasme poslinkių ryšio matricoje $[C]$; $[\bar{A}]$ – yra fiktyvi rėmo elementų pusiausvyros lygčių $[\bar{A}] S = \bar{F}$ matrica globalioje koordinatų sistemoje, o vektorius $\bar{F}$ yra sudarytas iš paskirų baigtinių elementų visų mazginių jėgų; $[P]$ – poslinkių loginė matrica, kurios elementai yra: jeigu diskrečiojo modelio j -ojo pjūvio (elemento mazginio taško) poslinkis i -tąja kryptimi yra apribotas; priešingu atveju $p_{ji} = 0$.

Tai netiesinio matematinio programavimo daugiaekstremis uždavinys, sprendžiamas iteracijų būdu. Daugiaekstremiškumą pagimdo Kuno ir Takerio papildomumo sąlygos (5). Ši aplinkybė komplikuoja uždavinio išsprendimą. Jį tikslinga modifikuoti, eliminuojant liekamąsias išraiškas S_r ir poslinkius u_r . Tam tikslui sprendžiamame lygčių sistemoje (3) ir (4) ir gauname:

$$S_r = [G][\Phi]^T \lambda, \quad (8)$$

$$u_r = [H][\Phi]^T \lambda. \quad (9)$$

Liekamųjų dydžių vektorius įrašę į pradinį optimizacijos uždavinį, gauname tokią matematinio modelio (1)–(7) modifikaciją:

$$\text{rasti} \quad L^T M_0 \rightarrow \min, \quad (10)$$

$$\text{kai} \quad [B]M_0 - [\Phi][G][\Phi]^T \lambda \geq [\Phi]S_e, \quad (11)$$

$$\lambda^T ([B]M_0 - [\Phi][G][\Phi]^T \lambda - [\Phi]S_e) = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad (12)$$

$$u^- \leq [P]([H][\Phi]^T \lambda + u_e) \leq u^+, \quad (13)$$

$$M_0 \geq M_0^{\min}. \quad (14)$$

Šio netiesinio matematinio programavimo uždavinio nežinomieji yra ribinių lenkimo momentų M_0 ir proporcingumo daugiklių λ vektoriai. Savaime aišku, kad jo apimtis yra gerokai mažesnė už (1)–(7) uždavinio apimtį.

Konstrukcijos optimizavimo uždavinio matematiniam modelyje (10)–(14) naudojami tampraus atsako dydžiai S_e , u_e . Jie savo ruožtu yra funkciškai priklausomi nuo optimizuojamų konstrukcijos parametrų. Šios funkcinės priklausomybės identifikavimas ir tiesioginis įtraukimas į tamprio-

sios plastinės konstrukcijos optimizavimo uždavinį esmingai komplikotų tiek patį jo formulavimą, tiek jo skaitinį realizavimą. Todėl praktiškai uždavinys turi būti sprendžiamas iteracijų būdu. Kiekvienos iteracijos metu tampriojo atsako parametrai skaičiuojami pagal gautus konstrukcijos optimizavimo rezultatus. Toks iteracijų skaičiavimas tęsiamas tol, kol uždavinio sprendimo procesas pasiekia konvergenciją.

Eksplotaciniai reikalavimai riboja laisvą plastinių deformacijų plitimą, todėl optimali konstrukcija yra neįreikiama tamprioji plastinė. Šiam būviui adekvačios papildomumo sąlygos (12), įeinančios į optimizavimo uždavinį (10)–(14), iš esmės lemia jo skaitinį realizavimą ir didelių kompiuterinių išteklių naudojimą. Aptarsime priemones, lemiančias iteracijų optimizacijos proceso sėkmę.

3. Optimizacijos uždavinio iteracijų proceso skaitmeninės realizacijos ypatumai

Pateiksime apribojimų dydžių ir pradinių parametrų parinkimo strategiją kryptingam iteracijų procesui valdyti, užtikrinančią sėkmingą uždavinio konvergenciją.

Kaip jau buvo minėta, optimizacijos uždavinyje (10)–(14) būtina žinoti funkcinę ryšį tarp konstrukcijos tampraus atsako dydžių ir optimizuojamų parametrų, kurie savo ruožtu lemia ribinių lenkimo momentų $M_0 = \sigma_y W_{pl}$ dydžius. Taigi jų jungiamasis ryšys turi rodyti funkcinę ryšį su skerspjuvio plotu A . Standartinių dvitėjų profilių atveju šis ryšys reikiamai tiksliai aproksimuojamas laipsninėmis funkcijomis:

$$I = a_1 A^{b_1}, \quad (15)$$

$$W_{pl} = a_3 A^{b_3}, \quad (16)$$

čia a_1, b_1, a_3 ir b_3 yra koeficientai, kurių dydžiai priklauso nuo standartinio profilio tipo.

Akivaizdu, kad tiesioginis gautų funkcijų naudojimas, formuojant matematinio modelio (10)–(14) influentes matricas $[G]$ ir $[H]$, duos labai sudėtingus reiškinius. Analogiška situacija bus taip pat gauta formuojant takumo sąlygų matricą $[\Phi]$. Ji sudaroma iš plieninių dvitėjų profilio sijų skaičiuojamojo pjūvio takumo sąlygų:

$$\begin{cases} M_{0j} - M_j \geq 0, \\ M_{0j} + M_j \geq 0, \\ M_{0j} - M_j / 1,18 - c_j^+ N_j \geq 0, \\ M_{0j} + M_j / 1,18 - c_j^- N_j \geq 0, \\ M_{0j} - M_j / 1,18 + c_j^+ N_j \geq 0, \\ M_{0j} + M_j / 1,18 + c_j^- N_j \geq 0. \end{cases} \quad (17)$$

Reikia turėti galvoje tai, kad sudarant šias takumo sąlygas būtina žinoti ribinių lenkimo momentų ir ribinių ašinių

jėgų santykį – ekscentricitetą c , kuris iš anksto yra nežinomas. Esant tempimo ašinei jėgai, jį žymėsime c^+ :

$$c^+ = \frac{M_{0j}}{N_{0j}} = \frac{\sigma_y a_3 A^{b_3}}{\sigma_y A} = a_3 \cdot A^{b_3-1}. \quad (18)$$

Esant gniuždymo deformacijai, ribinė įraša yra ribinė ašinė jėga klupimui $N_{cr} = \chi \sigma_y A = \sigma_{cr} A$. Čia skaičiuojamieji klupimo įtempiai $\sigma_{cr} = \chi \sigma_y$, o χ yra redukcijos koeficientas, priklausantis nuo kolonos bedimensio liaunio. Šis liaunis yra apibrėžiamas taip:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_E} = \frac{l_b}{i} \frac{1}{\lambda_E} = \frac{l_b}{\sqrt{I_x/A}} \frac{1}{\pi \sqrt{E/\sigma_y}}, \quad (19)$$

čia: λ – strypo liaunis; l_{eff} – klupdomo strypo skaičiuojamasis ilgis, nustatomas vadovaujantis STR 2.05.08:2005 nurodymais [20]; $\lambda_E = \pi \sqrt{E/\sigma_y}$ – Eulerio liaunis.

Tuomet redukcijos koeficientą χ , pavyzdžiui, pagal EN3 reikalavimus ([20]) galima skaičiuoti taip:

$$\chi = \frac{1}{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \bar{\lambda}^2}}, \text{ bet } \chi \leq 1. \quad (20)$$

$$\varphi = 0,5 \left[1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right]. \quad (21)$$

(21) formulėje neatitikties koeficiento α reikšmės yra tokios [21]: $\alpha=0,21$ karštojo formavimo vamzdžiams ir I tipo valcuotiesiems profiliuotiesiems, kurių $h/b > 1,2$; $\alpha=0,34$ karštai valcuotiesiems I tipo profiliuotiesiems, kurių $h/b \leq 1,2$ ir kampuočiams; $\alpha=0,49$ šaltai formuotiems vamzdžiams, U tipo ir T tipo valcuotiesiems profiliuotiesiems, ištisinio apvalaus ir stačiakampio skerspjūvio strypams. Tokiu būdu, esant gniuždymo ašinei jėgai, ekscentricitetas c^- bus:

$$c^- = \frac{M_{0j}}{N_{crj}} = \frac{\sigma_y a_3 A^{b_3}}{\chi \sigma_y A} = \frac{a_3}{\chi} \cdot A^{b_3-1}. \quad (22)$$

Siekiant išvengti aprašytų skaitinės realizacijos problemų, optimizacijos uždavinys sprendžiamas iteraciniu būdu. Kiekvienoje iteracijoje nustatomas uždavinio (10)–(14) sprendinys įvestų tampraus atsako reikšmių atžvilgiu. Gauname optimalius skerspjūvių ribinių įrašų dydžius ir juos atitinkančius naujus A , I ir c . Nauji tampraus atsako parametrai perskaičiuojami pagal šiuos konstrukcijos optimizacijos rezultatus. Toks iteracinis skaičiavimas trunka tol, kol uždavinio sprendimo procesas konverguoja.

Reikia pasakyti keletą pastabų dėl matematinio modelio (10)–(14) efektyvaus naudojimo ir gaunamų sprendi-

nių, nes nekorektiškas deformatyvumo reikalavimus reglamentuojančių sąlygų pradinio parametro ir konstrukcinių apribojimų parinkimas daro įtaką optimizacijos proceso iteracijų sėkmei.

1. Ribinių lenkimo momentų apatinių ribų $M_0^{\min}$ parinkimas. Jas galima nustatyti, išsprendus rėmo optimizacijos uždavinį plastiškosios iirties metu [6, 9], įvertinus rėmo strypų stabilumą pagal ribinį liaunį. Tuomet gaunamas toks ekstremumo uždavinio matematinis modelis:

$$\text{rasti} \quad L^T M_0 \rightarrow \min, \quad (23)$$

$$\text{kai} \quad [B] M_0 - [\Phi_c] S \geq 0, \quad (24)$$

$$[A] S = F, \quad (25)$$

$$M_0 \geq M_{0,cr}^{\min}, \quad (26)$$

čia $M_{0,cr}^{\min}$ – rėmo elementų ribinių lenkimo momentų minimalių reikšmių vektorius. Jos, įvertinant gniuždomų strypų klupimo sąlygas pagal ribinio liaunio reikalavimus [18, 21], skaičiuojamos pagal šią formulę:

$$M_{0,cr}^{\min} = \sigma_y a_3 \left(\frac{l_b^2}{a_1 \lambda_{rib}^2} \right)^{\frac{b_3}{b_1-1}}. \quad (27)$$

$[\Phi_c]$ – rėmo takumo sąlygų matrica, sudaryta iš kiekvieno baigtinio elemento skaičiuojamojo pjūvio takumo sąlygų (17). Reikia turėti galvoje, kad jų išraiška priklauso nuo ekscentricitetų c^+ ir c^- , skaičiuojamų pagal (18) ir (19) formules. Kadangi pradedant optimizaciją jie yra nežinomi, tai uždavinys skaičiuojamas iteracijų būdu. Vieną iteraciją sudaro tokios skaičiavimo operacijos:

- 1) pagal reglamento [20] reikalavimus nustatomi laisvojo rėmo strypų ribiniai liauniai;
- 2) skaičiuojamos pradinės ribinių lenkimo momentų reikšmės $M_0^{pr} = M_{0,cr}^{\min}$ pagal (27) formulę;
- 3) nustatomos strypų pradinės ekscentricitetai c^+ ir c^- reikšmės;
- 4) sudaroma takumo sąlygų matrica $[\Phi_c]$;
- 5) sprendžiamas tiesinio matematinio programavimo uždavinys (23)–(26), kurio rezultatas yra naujos ribinių lenkimo momentų reikšmės M_0^{naujos} ;
- 6) nustatome naujas rėmo strypų skerspjūvių plotų reikšmes $A_{nauji} = (M_0^{naujos} / \sigma_y \cdot a_3)^{1/b_3}$;
- 7) tikrinama sąlyga: ar absoliutinės ribinių lenkimo momentų skirtumų reikšmės yra didesnės už mažą teigiamąjį skaičių eps , t. y. tikrinama, ar $|M_0^{naujos} - M_0^{pr}| > eps$?

jei taip – tai A_{nauji} tampa A_0 , o M_0^{naujos} tampa M_0^{pr} , ir vykdoma trečiojo punkto operacija;

jei ne – tai iteracijų pabaiga ir apdorojami skaičiavimo rezultatai.

Apskaičiuotos konstrukcijos elementų ribinių lenkimo momentų reikšmės yra suvaržytasis vektorius $M_0^{\min}$, o tikslo funkcijos (23) reikšmė bus pagrindinio optimizacijos uždavinio (10)–(14) apatinė reikšmė.

2. Poslinkių viršutinių ir apatinių ribų parinkimas.

Naudodami atliktos optimizacijos rezultatus $M_0 = M_0^{naujos}$ ir redukuotą apkrovą $\tilde{F} = \gamma_{red} F$ (γ_{red} – apkrovos redukcijos faktorius, mažesnis už 1), sprendžiame konstrukcijos įtempto-deformuoto būvio analizės uždavinį [9, 11]:

$$\text{rasti} \quad \frac{1}{2} \lambda^T [\Phi_c] [G] [\Phi_c]^T \lambda - \lambda^T M_0 + \lambda^T [\Phi_c] [D]^{-1} [\bar{A}]^T [C] [K]^{-1} \tilde{F} \rightarrow \max, \quad (28)$$

$$\text{kai} \quad \lambda \geq 0, \quad (29)$$

čia: $[K]$ – konstrukcijos BEM standumo matrica; $[D]$ – kvazidiagonalioji matrica, sudaryta iš elementų pasidavimo $\frac{l}{EI}$ ir $\frac{l}{EA}$.

Išsprendę šį kvadratinio programavimo uždavinį ir panaudoję (8) ir (9) formules, nustatome rėmo poslinkių viršutines ribas $u_{\max}$ (poslinkių dydžius prieš pat plastiškąją irti): $u_{\max}^+$, jei $u_{\max}^+ > 0$ arba $u_{\max}^-$, jei $u_{\max}^- < 0$.

Mažinant apkrovos faktorių γ_{red} apskaičiuojami rėmo poslinkiai pirmojo plastiškojo lanksto susidarymo metu. Šios reikšmės yra poslinkių apatinės ribos $u_{\min}$, atitinkančios tamprų atsaką: $u_{\min}^+$, jei $u_{\min}^+ > 0$ arba $u_{\min}^-$, jei $u_{\min}^- < 0$.

Reikia pažymėti, kad uždavinio (10)–(14) apribojimų sąlygose duotos poslinkių kitimo ribos u^+ ir u^- turi būti tarp šių ribinių reikšmių:

$$\begin{aligned} \text{jei } u^+ > 0, \text{ tai } u_{\min}^+ &\leq u^+ \leq u_{\max}^+; \\ \text{jei } u^- < 0, \text{ tai } u_{\min}^- &\geq u^- \geq u_{\max}^-. \end{aligned} \quad (30)$$

Tai užtikrina tampriosios plastinės konstrukcijos darbą, todėl ji gali būti optimizuojama pagal matematinį modelį (10)–(14). Pažeidus šiuos reikalavimus uždavinys neturi sprendinio.

3. Pradinio taško parinkimas – startinės ribinių lenkimo momentų reikšmės. Optimizacijos uždavinio (10)–(14) startui pradinis taškas (pradinės ribinių lenkimo momentų vektoriaus M_0^{pr} reikšmės) turi būti taip parinktas, kad išsprendus analizės uždavinį (10)–(14) su pradiniais M_0^{pr} , gautos poslinkių reikšmės būtų didesnės už tamprias ir mažesnės už suirties metu gautąsias, t. y. tenkintų šias nelygybes:

$$\begin{aligned} \text{jei } u > 0, \text{ tai } u_{\min}^+ &\leq u \leq u_{\max}^+; \\ \text{jei } u < 0, \text{ tai } u_{\min}^- &\geq u \geq u_{\max}^-. \end{aligned} \quad (31)$$

Įvykdžius visas būtinas sąlygas, rėmo optimizacijos uždavinys (10)–(14) toliau skaičiuojamas iteracijų būdu. Vieną iteraciją sudaro tokios skaičiavimo operacijos:

- 1) parenkamas startinis vektorius M_0^{pr} ir apskaičiuojamos juos atitinkančios pradinės strypų skerspjūvių plotų reikšmės $A_0 = (M_0^{pr} / \sigma_y \cdot a_3)^{1/b_3}$;
- 2) nustatomos pradinės ribinių įrašų santykių $c^+ = a_3 \cdot A_0^{b_3-1}$ ir $c^- = a_3 \cdot A_0^{b_3-1} / \chi$ reikšmės;
- 3) sudaromos BEM matricos $[K]$, $[D]$ ir $[\bar{A}]$;
- 4) atliekama konstrukcijos tampraus atsako analizė ir nustatomi vektoriai S_e ir u_e ;
- 5) sudaromos takumo sąlygų, liekamųjų įrašų ir liekamųjų poslinkių influentinės matricos $[\Phi_c]$, $[G]$ ir $[H]$;
- 6) sprendžiamas tampriosios plastinės analizės uždavinys (28)–(29) ir nustatomos tikrosios einamosios iteracijos įrašos ir poslinkiai;
- 7) tikrinama būtinoji (31) sąlyga:
jei taip – tai iteracijos vykdomos toliau;
jei ne – tai grįžtame į pradžią;
- 8) sprendžiamas pagrindinis netiesinis optimizacijos uždavinys (10)–(14), kurio rezultatas yra naujos ribinių lenkimo momentų reikšmės M_0^{naujos} ;
- 9) gauto optimizacijos rezultato pasekmė – naujos skaičiuojamųjų elementų skerspjūvių plotų reikšmės $A_{nauji} = (M_0^{naujos} / \sigma_y \cdot a_3)^{1/b_3}$;
- 10) tikrinama sąlyga: ar tikslo funkcijų skirtumo absoliutinė reikšmė yra didesnė už pasirinktą tikslumą eps , išreikštą procentais, t. y. tikrinama, ar $|fval - Tfs| \times 100 / fval > eps$?
- jei taip** – tai $A_{nauji} = A_0$, o $M_0^{naujos} = M_0^{pr}$ ir vykdoma antrojo punkto operacija;
jei ne – tai iteracijų pabaiga;
- 11) sudaromos galutinės BEM matricos $[D]$ ir $[\Phi_c]$;
- 12) nustatomi tampraus atsako galutiniai vektoriai S_e , u_e ir sprendžiamas optimalios konstrukcijos, patyrusios netampriąsias deformacijas, analizės uždavinys (28)–(29);
- 13) apdorojami skaičiavimo rezultatai.

4. Skaičiavimo pavyzdys

Sudaryto optimizacijos uždavinio skaičiavimo algoritmo galimybes atskleisime optimizuodami vienos angos

dešimties aukštų metalinį rėmą, kuris yra parodytas 1 pav., a. Ten pat parodyta nagrinėjamo rėmo geometrija, išorinės apkrovos pridėjimo vietos ir dydžiai bei ribinių lenkimo momentų M_0 pasiskirstymas konstrukcijos elementuose.

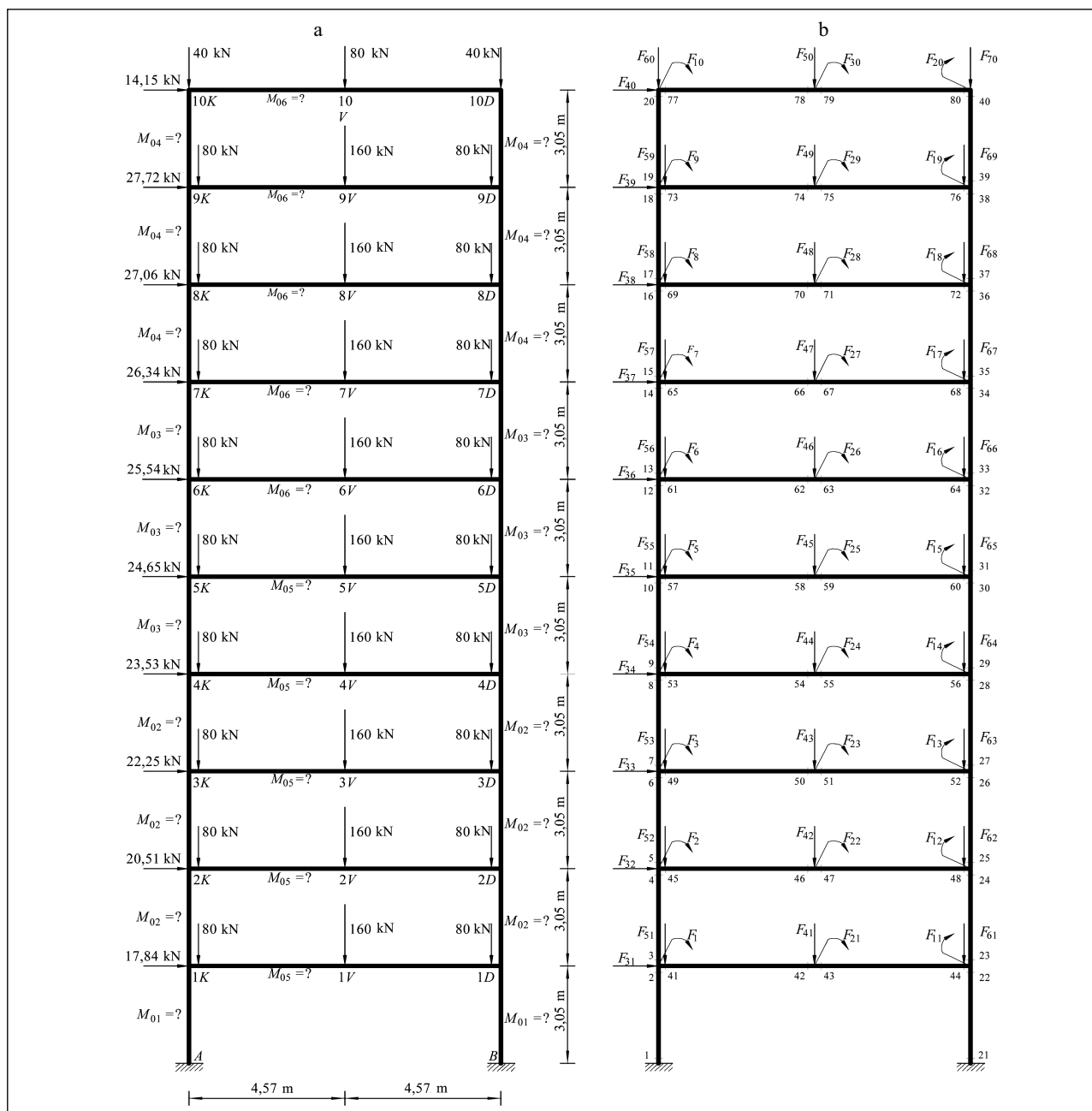
Rėmas projektuojamas su vienodo dydžio ribiniais momentais tam tikrai grupei strypų: keturi ribiniai momentai kolonom ir du – rėmsijėms (1 pav., a).

Konstrukcijos optimizacija atliekama ribojant jos poslinkius taip: rėmo mazgų horizontaliųjų poslinkių ribinė reikšmė yra lygi 20 cm ($u_{40}^+ = 20$, $u_{40}^- = 0$), o rėmsijų ilinskių ribinė reikšmė yra 5 cm ($u_{48}^+ = 5$, $u_{48}^- = 0$). Rėmo elementai yra iš valcuotųjų dvitėjų profilių, kurių skerspjū-

viai atitinka IPE Europos standartą. Jų $a_1 = 0,7919$, $b_1 = 2,3201$, $a_3 = 0,8295$, $b_3 = 1,6605$. Plieno takumo riba $\sigma_y = 235$ MPa, Tamprumo modulis $E = 206$ GPa, medžiagos tankis $\rho = 7850$ kg/m³.

Nurodymai. Diskretinis rėmo modelis sudaromas taip, kad rėmsijė būtų sudaryta iš dviejų elementų. Taigi turime 20 koloninių elementų ir 20 sijinių elementų, iš viso 40 elementų. Kiekvieno elemento gale veikia lenkimo momentas, o kolonos elemente – dar ir pastovaus dydžio ašinė jėga.

Taigi rėmo diskretiniame modelyje iš viso yra 80 nežinomų lenkimo momentų, 20 nežinomų ašinių jėgų ir 6 nežinomi ribiniai lenkimo momentai. Kadangi rėmas yra 30 kartų statiskai neišsprendžiamas, tai diskretinio modelio



laisvumo laipsnis $m = 100 - 30 = 70$. Vadinas, dar bus 70 nežinomų poslinkių, kurių teigiamos kryptys atitinka 1 pav. b dalyje parodytus apkrovos vektoriaus komponentus. Skaičiuoti naudojamos valcuotųjų dvitėjų profiliuotųjų takumo sąlygos, pateiktos (17) formulėje, kurios, įvertinus strypo įtempių būvį, užrašomos kiekvieno elemento galiniams pjūviams.

Ribinių įrašų apatinės ribas gauname iš ribinės pusiausvyros rėmo optimizacijos uždavinio (23)–(26) sprendinio.

Jos yra tokios: $\mathbf{M}_0^{pl} = [560,2 \ 432,9 \ 278,9 \ 113,9 \ 323,1 \ 240,1]^T$. Tuomet tikslo funkcijos apatinė reikšmė $\mathbf{L}^T \mathbf{M}_0^{pl} = 44\,278 \text{ kNm}^2$. Su šiomis reikšmėmis ir apkrovos redukcijos faktoriumi $\gamma_{red} = 0,997$ yra sprendžiamas analizės uždavinys (28)–(29) ir nustatomos rėmo poslinkių viršutinės ribos (poslinkių dydžiai plastiškosios iirties metu):

horizontaliaja kryptimi – 10 aukšto lygyje:

$$u_{40,\max}^+ = u_{40,e} + u_{40,r} = 20,30 + 47,95 = 68,25 \text{ cm};$$

vertikaliaja kryptimi – 8 aukšto rėmsijės vidurio įlinkis:

$$u_{48,\max}^+ = u_{48,e} + u_{48,r} = 3,90 + 14,33 = 18,23 \text{ cm}.$$

Sumažinę apkrovos faktorių iki 0,648 ir išsprendę analizės uždavinį (28)–(29), nustatome rėmo pirmojo plastiškojo lanksto susidarymo vietą. Jis atsiranda 8 aukšto dešinės kolonos viršuje (36 pjūvis), kai yra tokios poslinkių reikšmės:

$$u_{40,\min}^+ = u_{40,e} + u_{40,r} = 13,34 + 0,0 = 13,34 \text{ cm};$$

$$u_{48,\min}^+ = u_{48,e} + u_{48,r} = 2,56 + 0,0 = 2,56 \text{ cm}.$$

Tai apatinės rėmo poslinkių kitimo ribos. Taigi uždavinio sąlygose duotos poslinkių kitimo ribos atitinka (30) sąlygą ir užtikrina tampriosios plastiškos būklės konstrukcijos darbą.

Optimizacijos procesui parinktos startinės ribinių len-

kimo momentų reikšmės yra apie 20 % didesnės $\mathbf{M}_0^{pl}$. Teigiame, kad:

$$\mathbf{M}_0^{pr} = [650 \ 492 \ 349 \ 162 \ 396 \ 298]^T.$$

Iš analizės uždavinio (28)–(29) sprendinio gauname, kad pradinės ribojamų poslinkių reikšmės atitinka būtinąsias sąlygas (31), nes:

$$13,34 < u_{40}^{pr} = 19,4 < 68,25,$$

$$2,56 < u_{48}^{pr} = 3,27 < 18,23.$$

10 aukšto rėmo optimizacijos uždavinio iteracijų procesui optimalumo kriterijus yra tokio pavidalo:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{M}_0 = (6,1M_{01} + 18,3M_{02} + 18,3M_{03} + 18,3M_{04} + 45,7M_{05} + 45,7M_{06}) \rightarrow \min.$$

Skaičiavimo rezultatų analizė. Atlikus nagrinėjamo rėmo iteracinį skaičiavimą, nustatyto tikslo optimalus projektas buvo pasiektas po 15 iteracijų. Projektuojamų parametrų kitimo dinamika optimizacijos iteracinio proceso metu pateikta 1 lentelėje. Jos nulinėje eilutėje surašytos startinio taško ribinių lenkimo momentų reikšmės. Gautas optimalus rėmo projektas užrašytas lentelės 15 eilutėje, o jo strypų skerspjūvių plotai (cm^2) – priešpaskutinėje lentelės eilutėje **R1**. Iš viso susidaro 13 plastiškųjų lankstų, kurių vietos yra pjūviuose 1, 21, 23, 25, 26, 30, 36, 48, 52, 56, 60, 64 ir 68.

Skaičiuojant gautas didžiausias poslinkis yra rėmo 10 aukšto horizontalusis poslinkis $u_{40} = 20,01 \text{ cm}$. Rezultatų analizė rodo, kad duotos ribinės poslinkių reikšmės turi įtaką optimizacijos procesui, nes 8, 9 ir 10 aukštų mazgų poslinkių horizontaliaja kryptimi reikšmės yra ribinės arba artimos joms. Rėmsijų poslinkių ribinės reikšmės yra nepasiekiamos. Didžiausias įlinkis yra 8V mazge ir yra lygus

1 lentelė. 10 aukštų rėmo $\mathbf{M}_0$ ir tikslo funkcijos kitimas, kai $u_{40}^+ = 20 \text{ cm}$, $u_{48}^+ = 5 \text{ cm}$

Table 1. 10-storey steel frame iterative solution convergence for $u_{40}^+ = 20 \text{ cm}$, $u_{48}^+ = 5 \text{ cm}$

It	M_{01}	M_{02}	M_{03}	M_{04}	M_{05}	M_{06}	$\mathbf{L}^T \mathbf{M}_0$
0	650,0	492,0	349,0	162,0	396,0	298,0	54 036
1	788,2	532,9	354,9	151,9	425,1	301,3	57 033
2	810,5	508,5	359,5	146,4	419,8	246,6	53 964
3	696,1	510,6	362,8	132,4	429,2	305,0	56 205
5	646,9	503,1	348,2	139,3	409,9	321,6	55 505
11	645,2	493,8	348,6	156,4	396,5	293,3	53 736
12	660,2	504,2	343,1	157,5	386,9	310,2	54 272
14	667,5	495,9	336,4	149,0	405,3	302,1	54 361
15	646,9	502,8	343,2	141,3	402,7	307,4	54 467
	A_{k1}	A_{k2}	A_{k3}	A_{k4}	A_{r1}	A_{r2}	Masė kg
R1	132,1	113,5	90,1	52,8	99,3	84,3	23 273
R2	87,2	70,1	62,5	47,7	101,3	81,7	18 793

2 lentelė. 10 aukštų rėmo elementų charakteristikos**Table 2.** Data of the chosen actual profiles

Elementas	Profilio Nr.	A (cm ²)	W_{pl} (cm ³)	I (cm ⁴)
A-1, B-1	IPE 550	134,4	2787	67 120
1-2-3-4	IPE 500	115,5	2194	48 200
4-5-6-7	IPE 400	84,46	1307	23 130
7-8-9-10	IPE 300	53,81	628,4	8 356
1-1-5-5	IPE 450	98,82	1702	33 740
6-6-10-10	IPE 400	84,46	1307	23 130

3,27 cm. Jis yra gerokai mažesnis už ribinę įlinkio reikšmę, kuri buvo imta 5 cm.

Ašinių jėgų įtaka optimizacijos rezultatams lyginama su duoto rėmo skaičiavimu pagal lenkiamųjų konstrukcijų skaičiavimo optimizacijos uždavinio matematinio modelio modifikaciją, aprašytą [10] darbe. Tuomet uždavinyje yra 80 nežinomų lenkimo momentų ir 50 poslinkių. Nustatyto tikslumo optimalus projektas buvo pasiektas po 8 iteracijų. Jo sprendimo rezultatai pateikti 1 lentelės paskutinėje eilutėje **R2**. Palyginus juos, pastebima, kad kolonų skerspjūvių plotai labai sumažėjo. Tai reiškia, kad projektuoti jie taikomi atsargiai.

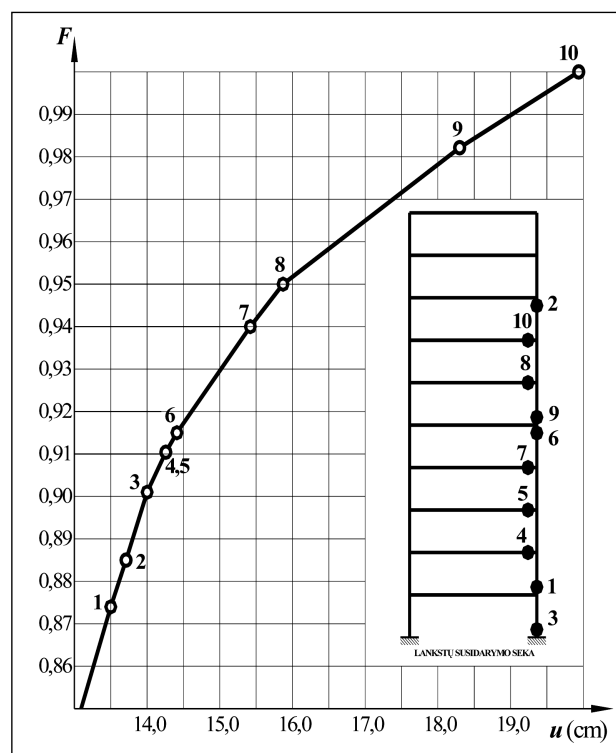
Panaudojus skaičiavimo metu surastus optimalius strypų skerspjūvių plotus, pateiktus 1 lentelėje, yra optimalus sudaromas rėmo projektas. Jo pagrindinės charakteristikos surašytos 2 lentelėje.

Apie jų patikimumą sprendžiame iš atliktos tampriosios plastinės analizės sprendinio. Gautasis rėmo 10 aukšto horizontalaus poslinkio (u_{40}) priklausomybės nuo apkrovos redukcijos faktoriaus grafikas (kartu su plastiškųjų lankstų susidarymo seka) yra pavaizduotas 2 pav. Atkreipime dėmesį, kad pirmasis plastiškasis lankstas atsiranda, kai faktorius $g_{red} = 0,874$, kai $u_{40} = 13,5$ cm, ir iki šešto lanksto susidarymo mažai skiriasi nuo tampraus sprendinio rezultato. Nuo šio momento rėmo deformatyvumas pastebimai didėja (nuo 14,5 cm iki 19,94 cm). Nustatyta, kad iš viso susidaro 10 plastiškųjų lankstų (23, 36, 21, 48, 52, 30, 56, 64, 31 ir 68 pjūviai).

5. Išvados

1. Išplėtotas plieninių konstrukcijų optimizacijos uždavinio matematinis modelis, įvertinant plieno netampriąsias deformacijas ir eksploatacinius reikalavimus, jungiančius stiprumo, deformatyvumo, stabilumo ir konstrukcinius apribojimus.

2. Sudarytas originalus rėmo strypų skerspjūvio parametrų optimizacijos algoritmas grindžiamas tampriu atsaku, kurį sukelia optimizuojamų konstrukcijos parametrai. Todėl uždavinys turi būti sprendžiamas iteracijų būdu, per-

**2 pav.** Apkrovos-poslinkio ryšio diagrama**Fig 2.** Load versus displacement diagram

skaičiuojant tampraus atsako dydžius pagal gautus konstrukcijos optimizavimo rezultatus. Sudaryto algoritmo principai gali būti sėkmingai pritaikyti ir kitokio tipo konstrukcijų optimizacijos uždaviniams realizuoti.

3. Aptarti optimizacijos ciklo iteracijų proceso skaitmeninės realizacijos ypatumai. Pateikta apribojimų dydžių ir pradinių parametrų parinkimo strategija, užtikrinanti efektyvią ir sėkmingą uždavinio konvergenciją.

4. Pasiūlyti plieninių standartinių profilių takumo sąlygų sudarymo principai, kurie įvertina strypų stabilumo reikalavimus.

5. Išplėtojo algoritmo efektyvumas iliustruojamas skaičiuojant 10 aukštų plieninį rėmą, projektuojamą naudojant standartinius profiliuotus. Gauti rezultatai lyginti su kitais darbais.

Literatūra

1. KARKAUSKAS, R.; NORKUS, A. Truss optimization under stiffness, stability constraints and random loading. *Mechanics Research Communications*, 2006, Vol 33, p. 177–189.
2. MANICKARAJAH, D.; XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. Optimum design of frames with multiple constraints using an evolutionary method. *Computers & Structures*, 2000, Vol 74, p. 731–741.
3. MARLET, R. T.; ARORA, J. S. Survey of multi-objective methods for engineering. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, Vol 26, p. 369–395.

4. SARMA, K. C.; ADELI, H. Fuzzy genetic algorithm for optimization of steel structures. *Journal of Structural Engineering*, 2000, Vol 126, p. 596–604.
5. LEVY, R.; LEV, O. Recent developments in structural optimization. *Journal of Structural Engineering, ASCE*. 1987, Vol 112, p. 1939–1962.
6. ČYRAS, A. A. *Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures*. Chichester: Ellis Horwood Lim., 1983. 121 p.
7. RAJAN, S. D.; NGUEN, D. T. Design optimization of discrete structural systems using MPI-enabled genetic algorithm. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, Vol 28, p. 340–348.
8. HAYALIOGLU, M. S. Optimum design of geometrically nonlinear elastic-plastic steel frames via genetic algorithm. *Computers & Structures*, 2000, Vol 77, p. 527–538.
9. ČYRAS, A.; BORKOWSKI, A.; KARKAUSKAS, R. *Theory and Methods of Optimization of Rigid-Plastic Systems*. Vilnius: Technika, 2004. 354 p.
10. NORKUS, A.; KARKAUSKAS, R. On direct and stepped optimization problems of flexural steel frame and their numerical realization considering strength and stiffness conditions. *Mechanika*, 2005, Vol 5, No 5, p. 41–50.
11. KARKAUSKAS, R. Analysis of non-holonomic behaviour of geometrically nonlinear elastic-plastic framed structures. *Mechanika*, 1997, Vol 4, No 11, p. 11–16.
12. KARKAUSKAS, R. Tarpriai plastinių geometriškai netiesinių strypinių konstrukcijų analizė. *Statyba* (Civil Engineering), 1998, IV t., Nr. 4, p. 36–42.
13. KALANTA, S. New formulations of optimization problems of elasto-plastic bar structures under displacements constraints. *Mechanika*, 1997, Vol 4, No 11, p. 11–16.
14. MERKEVICIUTE, D.; ATKOCIUNAS, J. Incremental Method for Unloading Phenomenon Fixation at Shakedown. *Journal of Civil Engineering and Management*, 2003, Vol IX, No 3, p. 178–191.
15. SAKA, M.; KAMESHKI, E. Optimum design of unbraced rigid frames. *Computers & Structures*, 1998, Vol 69, p. 433–442.
16. CHEN, H. F.; LIU, Y. H.; CEN, Z. Z.; XU, B. Y. On the Solution of Limit Load and Reference Stress of 3-D Structures under Multi-Loading Systems. *Engng. Struct.*, 1999, Vol 21, p. 530–537.
17. ZHANG, Y. G.; LU, M. W. An Algorithm for Plastic Limit Analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1995, Vol 126, p. 333–341.
18. KARKAUSKAS, R. Optimization of Elastic-Plastic Geometrically Nonlinear Light-Weight Structures under Stiffness and Stability Constraints. *Journal of Civil Engineering and Management*, 2004, Vol X, No 2, p. 97–106.
19. SOH C. K.; CHAN T. K. Numerical Method for Lower-Bound Solution of the Rigid-Plastic Limit Analysis Problem. *Journal of Engineering Mechanics*, 2001, Vol 127, No 11, p. 1075–1081.
20. STR 2.05.08:2005* *Plėninių konstrukcijų projektavimas*. Vilnius, 2005.
21. EC3. *Eurocode No 3* Design of Steel Structures*, Vol 1, November 1990; Vol 2, July 1990.

Romanas KARKAUSKAS. Professor, PhD. Dept of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University.

Author and coauthor of 2 monographs, 2 manuals and over 80 scientific articles. Research interests: elastic-plastic analysis and optimization of structures, including physical and geometrical non-linearities, numerical methods in structural mechanics. Lithuanian State Research Prize Laureate (1993).

Juozas NAGEVIČIUS. Assoc Prof, PhD. Dept of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University.

Author and coauthor of 2 manuals and over 40 scientific articles. Research interests: elastic-plastic analysis and optimization of structures, numerical methods in structural mechanics. Lithuanian State Research Prize Laureate (1993).