

## Apibendrintų matų sąsūkos

Kazimieras PADVELSKIS<sup>1</sup>, Algimantas BIKELIS<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas  
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius

<sup>2</sup> Vytauto Didžiojo universitetas, Informatikos fakultetas  
Vileikos g. 8, LT-44404 Kaunas

el. paštas: k.padvelskis@if.vdu.lt; marius@post.omnitel.net

**Santrauka.** Darbe nagrinėjamos nepriklausomų atsitiktinių dydžių tikimybinių skirstinių sąsūkos. Sąsūkų palyginimui gauta asimptotinė formulė, kurioje yra panaudotos apibendrintų matų sąsūkos.

*Raktiniai žodžiai:* sudėtinis Puasono skirstinys, Bergstremo tapatybė, Grigelionio asimptotinis skleidinys.

### Įvadas

B. Grigelionis darbuose [2,3] nagrinėjo nepriklausomų sveikaskaitinių atsitiktinių dydžių

$$\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}, \quad (1)$$

sumos

$$\zeta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n}, \quad (2)$$

tikimybinio skirstinio  $F_n(x) = P\{\zeta_n < x\}$  aproksimavimą sudėtinu Puasono dėsnio tikimybinu skirstiniu  $G(x; \{\pi\})$ , kurio charakteringoji funkcijas yra

$$\widehat{G}(t) = \exp \left\{ \sum_{k \neq 0} (e^{itk} - 1) \pi(k) \right\},$$

čia  $\pi(k) \geq 0$  ir  $\sum_{k \neq 0} \pi(k) < \infty$ . Darbe [3] yra reikalaujama, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} (1 - P\{\xi_{nj} = 0\}) = 0 \quad (3)$$

bei galiotų sąlygos, užtikrinančios  $F_n(x)$  silpną konvergavimą į  $G(x; \{\pi\})$ , t.y.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} P\{\xi_{nj} = k\} = \pi(k)$$

ir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} (1 - P\{\xi_{nj} = 0\}) = \sum_{k \neq 0} \pi(k).$$

Esant šioms sąlygoms, B. Grigelionis [3] sukonstravo asimptotinių skleidinių  $\overline{F}_n(x)$  ir įvertino liekamąjį narį  $F_n(x) - \overline{F}_n(x)$ .

Dažnai nepriklausomų nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių skirstinių sąsūku nagrinėjimas yra sudėtingas, todėl mes siūlome pereiti prie vienodų tikimybių skirstinių sąsūku, t.y. mes konstruojame nepriklausomų sveikaskaitinių vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seką

$$\eta_{n1}, \eta_{n2}, \dots, \eta_{nk_n}, \tag{4}$$

su pasiskirstymo funkcija

$$G_n(x) = P\{\eta_{n1} < x\} = \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} P\{\xi_{nj} < x\} \tag{5}$$

ir nagrinėjame skirtumą

$$\Delta_n(x) = F_n(x) - G_n^{*k_n}(x), \tag{6}$$

čia simbolis  $*$  žymi nurodytų pasiskirstymo funkcijų sąsūką, t.y.  $G_n^{*k_n}(x)$  yra sumos  $\eta_n = \eta_{n1} + \eta_{n2} + \dots + \eta_{nk_n}$  pasiskirstymo funkcija.

Pasinaudoję H. Bergstremo [1] tapatybe

$$F^{*n}(x) = G^{*n}(x) + \sum_{v=1}^s \binom{n}{v} (F - G)^{*v} * G^{*(n-v)}(x) + r_n^{(s+1)},$$

čia  $s \geq 1$ ,  $F(x)$  ir  $G(x)$  – pasiskirstymo funkcijos, o

$$r_n^{(s+1)} = \sum_{m=s+1}^n \binom{m-1}{s} F^{*(n-m)} * (F - G)^{*(s+1)} * G^{*(m-s-1)}(x),$$

gauname

$$G_n^{*k_n}(x) = \sum_{v=0}^s \binom{k_n}{v} (G_n(x) - G_n^{*\frac{1}{k_n}}(x; \{\pi\}))^{*v} * G_n^{*\frac{k_n-v}{k_n}}(x; \{\pi\}) + r_{k_n}^{(s+1)}.$$

### 1. Charakteringųjų funkcijų asimptotiniai skleidiniai

Atsitiktinių dydžių  $\xi_{nj}$  ir  $\zeta_n$  charakteringąsias funkcijas atitinkamai žymėsime  $\widehat{F}_{nj}(t)$  ir  $\widehat{F}_n(t)$ . Tada atsitiktinio dydžio  $\eta_{n1}$  charakteringoji funkcija yra

$$\widehat{G}_n(t) = \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} \widehat{F}_{nj}(t).$$

Kadangi atsitiktiniai dydžiai  $\xi_{nj}$  ir  $\eta_{nj}$  yra sveikaskaitiniai, tai

$$\widehat{F}_{nj}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{itm} P\{\xi_{nj} = m\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{itm} p_{nj}(m)$$

ir

$$\widehat{G}_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{itm} P\{\eta_{n1} = m\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{itm} \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} p_{nj}(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{itm} p_n(m).$$

Šiuo atveju (3) sąlygą užrašome taip

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p_n(0)) = 0.$$

Pastebėsime, kad  $\widehat{G}_n(t) \neq 0$  visiems  $t \in \mathbb{R}$ , kai  $n \in A_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid p_n(0) > \frac{3}{4}\}$ .

Vietoje (6) nagrinėsime skirtumą

$$\widehat{\Delta}_n(t) = \widehat{F}_n(t) - \widehat{G}_n^{k_n}(t) = \prod_{r=1}^{k_n} \widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n^{k_n}(t). \quad (7)$$

Kai  $n \in A_1$ , gauname

$$\widehat{F}_n(t) = \widehat{G}_n^{k_n}(t) \exp \left\{ \sum_{r=1}^{k_n} \log \left( 1 + \frac{\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t)}{\widehat{G}_n(t)} \right) \right\}. \quad (8)$$

Akivaizdu, kad  $|\widehat{G}_n(t)| \geq 2p_n(0) - 1 > \frac{1}{2}$  visiems  $t \in \mathbb{R}$  ir  $n \in A_1$ . Be to,

$$\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{itm} \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} (p_{nr}(m) - p_{nj}(m)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{itm} q_{nr}(m).$$

Pažymėkime

$$q_n = \max_{1 \leq r \leq k_n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_n} \left| \sum_{j=1}^{k_n} (p_{nr}(m) - p_{nj}(m)) \right|.$$

Pastebėsime, kad  $q_n = 0$ , jei (1) sekoje atsitiktiniai dydžiai turi vienodus tikimybių skirstinius. Akivaizdu, kad  $q_n \leq 2$ .

Pažymėkime  $A_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid 5q_n < 2p_n(0) - 1\}$ . Tada, kai  $n \in A_1 \cap A_2$ , turime

$$\left| \frac{\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t)}{\widehat{G}_n(t)} \right| < \frac{4}{5},$$

visiems  $t \in \mathbb{R}$  ir  $r = 1, 2, \dots, k_n$ .

Dabar (8) formulę, kai  $n \in A_1 \cap A_2$ , galime parašyti

$$\widehat{F}_n(t) = \widehat{G}_n^{k_n}(t) \exp \left\{ \sum_{r=1}^{k_n} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \left( \frac{\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t)}{\widehat{G}_n(t)} \right)^l \right\}. \quad (9)$$

Šioje formulėje išnaudojome tapatybę

$$\sum_{r=1}^{k_n} \frac{\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t)}{\widehat{G}_n(t)} \equiv 0.$$

Toliau

$$\begin{aligned} \widehat{F}_n(t) &= \widehat{G}_n^{k_n}(t) \exp \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \left( \frac{1}{k_n} \right)^l \sum_{r=1}^{k_n} \left( \frac{k_n(\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t))}{\widehat{G}_n(t)} \right)^l \right\} \\ &= \widehat{G}_n^{k_n}(t) \exp \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} \left( \frac{1}{k_n} \right)^j \frac{1}{k_n} \sum_{r=1}^{k_n} \left( \frac{k_n(\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t))}{\widehat{G}_n(t)} \right)^{j+1} \right\} \\ &= \widehat{G}_n^{k_n}(t) \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k_n} \right)^j \beta_j(t) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

čia

$$\begin{aligned} \beta_j(t) &= \sum_{v_1+2v_2+\dots+jv_j=j} \frac{(-1)^{v_1+\dots+v_j}}{v_1! \dots v_j!} \prod_{l=1}^j \left( \frac{\alpha_l(t)}{l+1} \right)^{v_l}, \\ \alpha_l(t) &= \frac{1}{k_n} \sum_{r=1}^{k_n} \left( \frac{k_n(\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t))}{\widehat{G}_n(t)} \right)^{l+1}. \end{aligned}$$

Atlikę skaičiavimus, kuriuos čia praleidžiame, gauname

$$\beta_j(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{itm} \sum_{v_1+2v_2+\dots+jv_j=j} \prod_{l=1}^j \left( -\frac{1}{k_n(l+1)v_j!} \sum_{r=1}^{k_n} Q_r^{*(l+1)}(m) \right)^{*v_l}, \quad (11)$$

čia daugianariai  $Q_r^{*l}(m)$  priklauso nuo tikimybių  $p_{nr}(m)$ ,  $r = 1, 2, \dots, k_n$ .

Iš (10) ir (11) lygybių gauname skirtumo  $\widehat{\Delta}_n(t) = \widehat{F}_n(t) - \widehat{G}_n^{k_n}(t)$  formalųjį skleidinį.

## 2. Tikimybių $P\{\zeta_n = k\}$ ir $P\{\eta_n = k\}$ palyginimas

Tegul galioja (3) sąlyga ir  $n \in A_1 \cap A_2$ . Iš (10) ir (11) lygybių gauname

$$\widehat{F}_n(t) = \widehat{G}_n^{k_n}(t) + \widehat{G}_n^{k_n}(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{itm} L_n(m), \quad (12)$$

čia

$$L_n(m) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k_n}\right)^j \sum_{v_1+2v_2+\dots+jv_j=j} \prod_{l=1}^j \left(-\frac{1}{k_n(l+1)v_j!} \sum_{r=1}^{k_n} Q_r^{*(l+1)}(m)\right)^{*v_l}.$$

Tačiau (1) sekoje atsitiktiniai dydžiai yra sveikaskaitiniai, tai

$$\begin{aligned} P\{\zeta_n = k\} &= P\{\eta_n = k\} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} P\{\eta_n = k - m\} L_n(m) \\ &= P\{\eta_n = k\} + G_n^{*k_n} * L_n(k), \end{aligned} \quad (13)$$

visiems  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Gautoje (13) lygybėje liekamojo nario įvertį paskelbsime kitame straipsnyje.

### Literatūra

1. H. Bergström. On asymptotic expansions of probability functions. *Skand. Aktuarietidskrift*, 34(1):1–34, 1951.
2. B. Grigelionis. On asymptotic expansion of the remainder term in the case of convergence to a Poisson law. *Liet. mat. rink.*, 2(1):35–48, 1962 (in Russian).
3. B. Grigelionis. Asymptotic expansions in the compound Poisson limit theorem. *Acta Applicandae Mathematicae*, 58:125–134, 1999.

### SUMMARY

#### **K. Padvelskis, A. Bikelis. Convolutions of generalized measures**

The convolutions of probability distributions of independent random variables are analysed in this paper.

*Keywords:* compound Poisson distribution, Bergström's identity, Grigelionis' asymptotic expansion.