ISSN 1392–1541 print
ISSN 1648–3502 online

Geodezija ir kartografija, 2006, XXXII t., Nr. 4
Geodesy and Cartography, 2006, Vol XXXII, No 4

UDK 528.14

ERDVINIŲ KOORDINAČIŲ, NUSTATYTŲ TRILATERACIJOS METODU, TIKSLUMAS

Jonas Skeivalas[1], Robertas Dargis[2]

[1]*Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,*
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva,
[2]*UAB „Eika“, A. Goštauto g. 40 A, LT-01112 Vilnius, Lietuva,*
el. paštas: [1]Jonas.Skeivalas@ap.vtu.lt, [2]robertas@eika.lt

Įteikta 2006 07 15, priimta 2006 09 21

Santrauka. Straipsnyje analizuojamas daugkartine linijine sankirta nustatytų taškų erdvinių koordinačių tikslumas. Tokia linijinės sankirtos metodu nustatytų taškų sistema sudaro trilateracijos tinklą. Erdvinių koordinačių reikšmėms skaičiuoti taikoma išmatuotų linijų ilgių parametrinių lygčių sistema, lygtys linearizuojamos pagal apytikres taškų koordinates. Apytikrių koordinačių reikšmės gali būti nustatomos bet kuriuo metodu. Apytikrių koordinačių pataisos skaičiuojamos mažiausiųjų kvadratų metodu. Nagrinėjama išmatuotų linijų ilgių bei parametrinių lygčių koeficientų klaidų įtaka išlygintųjų erdvinių koordinačių tikslumui.

Reikšminiai žodžiai: trilateracija, erdvinės koordinatės, mažiausiųjų kvadratų metodas.

1. Įvadas

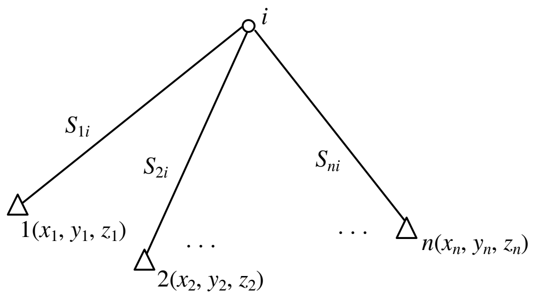
Daugkartinės linijinės sankirtos metodu nustatomų taškų erdvinių koordinačių reikšmėms skaičiuoti panaudojami linijų direkciniai kampai bei kampų tarp atitinkamų linijų reikšmės. Kampų reikšmėms skaičiuoti taikomos kampų funkcinės išraiškos išmatuotų linijų ilgiais [1–4]. Tačiau toks skaičiavimų metodas nėra racionalus nei taikomų algoritmų, nei skaičiavimų apimties prasme. Straipsnyje pateikiamas erdvinių koordinačių skaičiavimo metodas taikant išmatuotų linijų ilgių parametrinių lygčių sistemą. Netiesinės parametrinės lygtys linearizuojamos pagal apytikres taškų koordinates, kurių reikšmės gali būti nustatomos bet kuriuo metodu [5–7]. Apytikrių koordinačių pataisos apskaičiuojamos mažiausiųjų kvadratų metodu, tiesinių parametrinių lygčių sistemą sprendžiant iteracijomis. Iteracinis procesas baigiamas, kai nustatomų taškų koordinačių tikslumas atitinka priimtąjį tikslumą. Pateikiamos formulės, pagal kurias nustatoma apytikrių koordinačių bei parametrinių lygčių koeficientų klaidų įtaka išlygintųjų koordinačių tikslumui.

2. Linijinės sankirtos teorinis principas

Taško erdvinėms koordinatėms nustatyti daugkartine linijine sankirta taikysime parametrinių lygčių sistemą (žr. pav.):

$$\left.\begin{aligned} \tilde{S}_{1i} &= \left(\Delta\tilde{x}_{1i}^2 + \Delta\tilde{y}_{1i}^2 + \Delta\tilde{z}_{1i}^2\right)^{1/2} \\ \tilde{S}_{2i} &= \left(\Delta\tilde{x}_{2i}^2 + \Delta\tilde{y}_{2i}^2 + \Delta\tilde{z}_{2i}^2\right)^{1/2} \\ &\dots \qquad\qquad \dots \\ \tilde{S}_{ni} &= \left(\Delta\tilde{x}_{ni}^2 + \Delta\tilde{y}_{ni}^2 + \Delta\tilde{z}_{ni}^2\right)^{1/2} \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

čia $\tilde{S}_{ni}$ – išlygintoji ni-tosios linijos ilgio reikšmė; $\Delta\tilde{x}_{ni} = \tilde{x}_i - x_n$, $\Delta\tilde{y}_{ni} = \tilde{y}_i - y_n$, $\Delta z_{ni} = \tilde{z}_i - z_n$ – atitinkami išlygintieji koordinačių prieaugiai; x_n, y_n, z_n – tikslios bazinių taškų koordinatės.



Daugkartinės linijinės sankirtos schema
Schema of multivariant linear intersection

Tikslios bazinių taškų 1, 2, …, n erdvinės koordinatės gali būti nustatomos įvairiais metodais, pavyzdžiui, GPS, elektroniniais tacheometrais ir kt.

Parametrinių lygčių sistema linearizuojama i-tojo taško apytikrių koordinačių srityje, ir rašoma pataisų lygčių sistema:

$$\left.\begin{aligned} v_{1i} &= a_{11}\tau x_i + a_{12}\tau y_i + a_{13}\tau z_i + l_{1i} \\ v_{2i} &= a_{21}\tau x_i + a_{22}\tau y_i + a_{23}\tau z_i + l_{2i} \\ &\dots \qquad\quad \dots \qquad\quad \dots \\ v_{ni} &= a_{n1}\tau x_i + a_{n2}\tau y_i + a_{n3}\tau z_i + l_{ni} \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

čia v_{ni} – ni-tosios išmatuotos linijos ilgio pataisa, $a_{n1} = \Delta x_{ni} / S_{ni}$, $a_{n2} = \Delta y_{ni} / S_{ni}$, $a_{n3} = \Delta z_{ni} / S_{ni}$ – ni-tosios pataisų lygties koeficientai; $\tau x_i, \tau y_i, \tau z_i$ – i-tojo nustatomo taško apytikrių erdvinių koordinačių (x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}) pataisos; $l_{ni} = S_{ni,0} - S_{ni}$ – ni-tosios pataisų lygties laisvasis narys, $S_{ni,0}$ – apytikris ni-tosios linijos ilgis, apskaičiuotas pagal apytikres i-tojo taško koordinates; S_{ni} – išmatuotas ni-tosios linijos ilgis. Apytikrės i-tojo taško koordinatės gali būti nustatytos labai apytiksliai, pavyzdžiui, su keleto metrų klaida. Tam gali būti taikomas bet kuris metodas. Linijų ilgiai matuojami elektroniniais tolimačiais.

Parametrinių pataisų lygčių sistema (2) matricų išraiška:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\tau + \boldsymbol{L}, \tag{3}$$

čia $\boldsymbol{V}$ – išmatuotų linijų ilgių pataisų vektorius, $\boldsymbol{A}$ – pataisų lygčių koeficientų matrica, kurios matmenys $n \times 3$; $\boldsymbol{\tau}$ – i-tojo taško apytikrių koordinačių pataisų vektorius, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{S}_0 - \boldsymbol{S}$ – laisvųjų narių vektorius, $\boldsymbol{S}_0$ – apytikrių linijų ilgių vektorius, $\boldsymbol{S}$ – išmatuotų linijų ilgių vektorius.

Taikant daugkartinės erdvinės linijinės sankirtos metodą išmatuotų linijų skaičius turi tenkinti nelygybę $n \geq 3$. Kuo didesnis išmatuotų linijų skaičius, tuo tiksliau galima nustatyti i-tojo taško koordinates taikant mažiausiųjų kvadratų metodą.

Vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ reikšmė gaunama kaip normalinių lygčių sistemos sprendinys:

$$\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}, \tag{4}$$

čia $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$ – normalinių lygčių koeficientų matrica, $\boldsymbol{P}$ – išmatuotų linijų ilgių svorių matrica, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$ – normalinių lygčių laisvųjų narių vektorius.

Kadangi i-tojo taško pradinės apytikrės koordinatės gali būti nustatytos su didelėmis klaidomis, tai normalinių lygčių sistema sprendžiama iteraciniu metodu. Vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ reikšmė tikslinama tol, kol dviejų gretimų iteracijų rezultatų skirtumas bus mažesnis už iš anksto pasirinktą teigiamąjį skaičių ε, apibūdinantį skaičiavimų tikslumą.

3. Išlygintųjų koordinačių tikslumo įvertinimas

Išlygintųjų i-tojo taško koordinačių reikšmės skaičiuojamos taip:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \\ \tilde{z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i0} \\ y_{i0} \\ z_{i0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau x_i \\ \tau y_i \\ \tau z_i \end{pmatrix},$$

arba $\tilde{\boldsymbol{T}}_i = \boldsymbol{T}_{i0} + \boldsymbol{\tau}$, čia $\tilde{\boldsymbol{T}}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)^T$.

Išlygintųjų i-tojo taško koordinačių vektoriaus $\tilde{\boldsymbol{T}}_i$ kovariacijų matrica $\boldsymbol{K}_{\tilde{T}_i}$ yra lygi

$$\boldsymbol{K}_{\tilde{T}_i} = \boldsymbol{K}_{T_{i0}} + \boldsymbol{K}_{\tau} = \boldsymbol{K}_{\tau},$$

nes $\boldsymbol{K}_{T_{i0}} = 0$, kai išlyginimo procedūrose fiksuotas nekintantis taško apytikrių koordinačių vektorius.

Diferencijavę matricas [2, 4] pagal formulę (4) gauname

$$\boldsymbol{K}_{\tau} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{L}}\right)_0 \boldsymbol{K}_L \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{L}}\right)_0^T + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{A}}\right)_0 \boldsymbol{K}_A \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{A}}\right)_0^T = \boldsymbol{K}_{\tau(L)} + \boldsymbol{K}_{\tau(a)}, \tag{5}$$

čia dalinės išvestinės simbolio indeksas 0 rodo, kad jos reikšmė apskaičiuota pagal žinomas atitinkamų dydžių reikšmes.

Toliau gauname formulės (5) komponentę $\boldsymbol{K}_{\tau(L)}$ esant linijų ilgių matavimo klaidoms:

$$\boldsymbol{K}_{\tau(L)} = \left(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{K}_L\left(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\right)^T = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}_S\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1} = \sigma_0^2\boldsymbol{N}^{-1}, \tag{6}$$

čia $\boldsymbol{K}_S = \boldsymbol{K}_{S,0} + \boldsymbol{K}_S = \boldsymbol{K}_S = \sigma_0^2\boldsymbol{P}^{-1}$, σ_0 – išmatuoto linijos ilgio, kai svoris lygus vienetui, standartinis nuokrypis.

Kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{\tau}$ komponentė $\boldsymbol{K}_{\tau(L)}$ rodo išmatuotų linijų ilgių klaidų įtaką vektoriaus τ nustatymo tikslumui.

Antroji kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{\tau}$ komponentė $\boldsymbol{K}_{\tau(a)}$ rodo pataisų lygčių koeficientų klaidų įtaką vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ nustatymo tikslumui. $\boldsymbol{K}_{\tau(a)}$ skaičiavimuose vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ skleistinę panaudosime kitu pavidalu:

$$\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{L}_{pn}^T\boldsymbol{A}_n = -\boldsymbol{N}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_p^T & & \\ & \boldsymbol{L}_p^T & \\ & & \boldsymbol{L}_p^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

čia $\boldsymbol{L}_p = \boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{A}_i$ – matricos $\boldsymbol{A}$ i-tasis stulpelis (i-tasis vektorius), $i = 1, 2, 3$.

Formulėje (7) taikomi žymėjimai

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^T \\ \boldsymbol{A}_2^T \\ \boldsymbol{A}_3^T \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L}_p = \boldsymbol{P}\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} p_1 \boldsymbol{l}_1 \\ p_2 \boldsymbol{l}_2 \\ \cdots \\ p_n \boldsymbol{l}_n \end{pmatrix}$$

ir $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{pn}^T\boldsymbol{A}_n$, $\boldsymbol{L}_{pn} = \left(\boldsymbol{L}_p\ \boldsymbol{L}_p\ \boldsymbol{L}_p\right)_{\text{diag}}$.

Kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{\tau}$ komponentę $\boldsymbol{K}_{\tau(a)}$, taikydami lygybę (7), gauname:

$$\boldsymbol{K}_{\tau(a)} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{L}_{pn}^T\boldsymbol{K}_{A_n}\left(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{L}_{pn}^T\right)^T = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{L}_{pn}^T\boldsymbol{K}_{A_n}\boldsymbol{L}_{pn}\boldsymbol{N}^{-1}. \tag{8}$$

Pataisų lygčių koeficientų kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{A_n}$ išraiška:

$$\boldsymbol{K}_{A_n} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{A_1A_1} & \boldsymbol{K}_{A_1A_2} & \boldsymbol{K}_{A_1A_3} \\ \boldsymbol{K}_{A_2A_1} & \boldsymbol{K}_{A_2A_2} & \boldsymbol{K}_{A_2A_3} \\ \boldsymbol{K}_{A_3A_1} & \boldsymbol{K}_{A_3A_2} & \boldsymbol{K}_{A_3A_3} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

čia $\boldsymbol{K}_{A_iA_j}$ – $\boldsymbol{A}_i$-tojo ir $\boldsymbol{A}_j$-tojo matricos $\boldsymbol{A}$ stulpelių kovariacijų matrica, kurios matmenys $(n \times n)$. $\boldsymbol{A}_1$ stulpelio elementams apskaičiuoti taikomi linijų ilgių koordinačių prieaugiai Δx, $\boldsymbol{A}_2$ stulpelio elementams – Δy ir $\boldsymbol{A}_3$ stulpelio elementams – Δz.

Kovariacijų matricos, pavyzdžiui $\boldsymbol{K}_{A_1A_1}$, $\boldsymbol{K}_{A_1A_3}$ rašomos taip:

$$\boldsymbol{K}_{A_1A_1} = \begin{pmatrix} K(a_{11}, a_{11}) & K(a_{11}, a_{21}) & \dots & K(a_{11}, a_{n1}) \\ K(a_{21}, a_{11}) & K(a_{21}, a_{21}) & \dots & K(a_{21}, a_{n1}) \\ \dots & & \dots & \\ K(a_{n1}, a_{11}) & K(a_{n1}, a_{21}) & \dots & K(a_{n1}, a_{n1}) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{K}_{A_1A_3} = \begin{pmatrix} K(a_{11}, a_{13}) & K(a_{11}, a_{23}) & \dots & K(a_{11}, a_{n3}) \\ K(a_{21}, a_{13}) & K(a_{21}, a_{23}) & \dots & K(a_{21}, a_{n3}) \\ \dots & & \dots & \\ K(a_{n1}, a_{13}) & K(a_{n1}, a_{23}) & \dots & K(a_{n1}, a_{n3}) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Analogiškai skaičiuojamos ir kitos kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{A_n}$ (9) komponentės. Kadangi linijų ilgiai matuojami nepriklausomai vienas nuo kito, tai formulės (9) komponentės $\boldsymbol{K}_{A_1A_1}, \boldsymbol{K}_{A_1A_2}, \dots$ ir kt. turės tik diagonaliuosius narius, kurie yra atitinkamų pataisų lygčių koeficientų kovariacijos. Kai kurių kovariacijų išraiškos:

$$K(a_{11}, a_{11}) = M\left(\frac{1}{S_{1i}}\delta\Delta x_{1i} \cdot \frac{1}{S_{1i}}\delta\Delta x_{1i}\right) = \frac{1}{S_{1i}^2} D\Delta x_{1i}, \tag{12}$$

$$K(a_{11}, a_{12}) = M\left(\frac{1}{S_{1i}}\delta\Delta x_{1i} \cdot \frac{1}{S_{1i}}\delta\Delta y_{1i}\right) = \frac{1}{S_{1i}^2} K(\Delta x_{1i}, \Delta y_{1i}), \tag{13}$$

$$K(a_{11}, a_{13}) = M\left(\frac{1}{S_{1i}}\delta\Delta x_{1i} \cdot \frac{1}{S_{1i}}\delta\Delta z_{1i}\right) = \frac{1}{S_{1i}^2} K(\Delta x_{1i}, \Delta z_{1i}), \tag{14}$$

čia $\delta\Delta x_{1i} = \Delta x_{1i} - M\Delta x_{1i}$, $M\Delta x_{1i}$ – koordinačių prieaugio Δx_{1i} vidurkis, $D\Delta x_{1i}$ – koordinačių prieaugio Δx_{1i} dispersija. Analogiškos ir $\delta\Delta y_{1i}$, $\delta\Delta z_{1i}$ dydžių išraiškos.

Atitinkamų dydžių kovariacijos nėra didesnės nei pavienių dydžių dispersijos, t. y.:

$$K(\Delta x_{1i}, \Delta y_{1i}) \le D\Delta x_{1i},$$
$$K(\Delta x_{1i}, \Delta y_{1i}) \le D\Delta y_{1i}.$$

ir atitinkamos kitų dydžių nelygybės.

Nustatysime pavienio taško koordinačių pataisų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ kovariacijų matricą $\boldsymbol{K}_{\tau(\boldsymbol{a})}$, esant pataisų lygčių koeficientų klaidų įtakai, paprastame pavyzdyje, kai $n = 4$, $S_{ji} \approx 100\,\mathrm{m}$, $j = (1, 2, 3, 4)$, $D\Delta x_{1i} \approx D\Delta y_{1i} \approx D\Delta z_{1i} \approx \dots \approx 1\,\mathrm{m}$ (parametrinių lygčių linearizavimo tikslumas), $a_{n1} \approx a_{n2} \approx a_{n2} < 1$, $P = E$, $L = (1111)^T$ m, $\sigma_0 = 0{,}01\,\mathrm{m}$.

Taikydami formules (8–12) apskaičiuojame vidutinę reikšmę:

$$K_{\tau(a)} \le 4 \cdot 10^{-4} N^{-1} N^{-1} \approx 0{,}25 \cdot 10^{-4} E\, m^2,$$

kai $N^{-1} \approx 0{,}25E$.

Taigi pavienio taško koordinačių pataisų $\tau x, \tau y, \tau z$ bei išlygintųjų koordinačių standartinių nuokrypių reikšmės dėl pataisų lygčių koeficientų klaidų įtakos yra lygios $\sigma_{\tilde{x}(a)} \approx \sigma_{\tilde{y}(a)} \approx \sigma_{\tilde{z}(a)} \le 0{,}005\,\mathrm{m}$.

Koordinačių pataisų $\tau x, \tau y, \tau z$ bei išlygintųjų koordinačių standartinių nuokrypių reikšmės dėl linijų ilgių matavimo klaidų yra lygios:

$$\sigma_{\tilde{x}(l)} \approx \sigma_{\tilde{y}(l)} \approx \sigma_{\tilde{z}(l)} \le \sigma_0 \sqrt{(N^{-1})_{ii}}\, 0{,}005\,\mathrm{m}.$$

4. Išlygintųjų linijų ilgių tikslumo įvertinimas

Įvertinsime išlygintųjų linijų ilgių vektoriaus $\tilde{\boldsymbol{S}}$ tikslumą, atsižvelgdami į parametrinių pataisų lygčių koeficientų a_{ij} klaidų įtaką. Galima parašyti

$$\tilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}_0 + \boldsymbol{A\tau}, \tag{15}$$

arba

$$\tilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}_0 + \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{e1} \\ \boldsymbol{A}_{e2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{en} \end{pmatrix} \boldsymbol{\tau},$$

čia $\boldsymbol{A}_{ei}$ – matricos $\boldsymbol{A}$ i-toji eilutė.

Lygybę (15) išreikšime kitu pavidalu –

$$\tilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}_0 + \boldsymbol{\tau}_e^T \boldsymbol{A}_e = \boldsymbol{S}_0 + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}^T & & & 0 \\ & \boldsymbol{\tau}^T & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boldsymbol{\tau}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{e1}^T \\ \boldsymbol{A}_{e2}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{en}^T \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Turint naujų išlygintųjų linijų ilgių vektoriaus $\tilde{S}$ pavidalą (16) galima parašyti kovariacijų matricos išraišką esant pataisų lygčių koeficientų klaidų įtakai:

$$\boldsymbol{K}_{\tilde{S}(\boldsymbol{a})} = \boldsymbol{K}_{S_0} + \boldsymbol{\tau}_e^T \boldsymbol{K}_{Ae} \boldsymbol{\tau}_e, \tag{17}$$

čia $\boldsymbol{\tau}_e = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}, ..., \boldsymbol{\tau})_{\text{diag}}$, $\boldsymbol{K}_{A_e}$ – matricos $\boldsymbol{A}$ eilučių tarpusavio kovariacijų matrica,

$$\boldsymbol{K}_{A_e} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{A_{e1}A_{e1}} & \boldsymbol{K}_{A_{e1}A_{e2}} & ... & \boldsymbol{K}_{A_{e1}A_{en}} \\ \boldsymbol{K}_{A_{e2}A_{e1}} & \boldsymbol{K}_{A_{e2}A_{e2}} & ... & \boldsymbol{K}_{A_{e2}A_{en}} \\ ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{K}_{A_{en}A_{e1}} & \boldsymbol{K}_{A_{en}A_{e2}} & ... & \boldsymbol{K}_{A_{en}A_{en}} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Kadangi linijų ilgiai matuojami nepriklausomai vienas nuo kito, tai kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{A_e}$ nediagonalieji nariai yra lygūs nuliui. Taigi lygybė (17) įgauna šį pavidalą:

$$\boldsymbol{K}_{\tilde{S}(\boldsymbol{a})} = \boldsymbol{K}_{S_0} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{K}_{A_{e1}A_{e1}} \boldsymbol{\tau} & & & 0 \\ & \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{K}_{A_{e2}A_{e2}} \boldsymbol{\tau} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{K}_{A_{en}A_{en}} \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

čia $\boldsymbol{K}_{S_0} = 0,$ nes išlyginimo procedūrose $\boldsymbol{S}_0$ laikomas nekintamu fiksuotu vektoriumi.

Matricos $\boldsymbol{A}$ n-tosios eilutės narių tarpusavio kovariacijų matrica tokia:

$$\boldsymbol{K}_{A_{en}A_{en}} = \begin{pmatrix} K(a_{n1}, a_{n1}) & K(a_{n1}, a_{n2}) & K(a_{n1}, a_{n3}) \\ K(a_{n2}, a_{n1}) & K(a_{n2}, a_{n2}) & K(a_{n2}, a_{n3}) \\ K(a_{n3}, a_{n1}) & K(a_{n3}, a_{n2}) & K(a_{n3}, a_{n3}) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Kai kurių kovariacijų išraiškos –

$$K(a_{n1}, a_{n1}) = M\left(\frac{1}{S_{ni}} \delta\Delta x_{ni} \cdot \frac{1}{S_{ni}} \delta\Delta x_{ni} \right) = \frac{1}{S_{ni}^2} D\Delta x_{ni},$$

$$K(a_{n1}, a_{n2}) = M\left(\frac{1}{S_{ni}} \delta\Delta x_{ni} \cdot \frac{1}{S_{ni}} \delta\Delta y_{ni} \right) = \frac{1}{S_{ni}^2} K(\Delta x_{ni}, \Delta y_{ni}),$$

$$K(a_{n1}, a_{n3}) = M\left(\frac{1}{S_{ni}} \delta\Delta x_{ni} \cdot \frac{1}{S_{ni}} \delta\Delta z_{ni} \right) = \frac{1}{S_{ni}^2} K(\Delta x_{ni}, \Delta z_{ni}).$$

Taikydami ankstesniame pavyzdyje pateiktų pradinių duomenų reikšmes gauname:

$$K_{\tilde{S}(a)} \le \boldsymbol{\tau}_e^T \boldsymbol{K}_{Ae} \boldsymbol{\tau}_e = 10^{-4} \boldsymbol{\tau}_e^T \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \end{array} \right) \boldsymbol{\tau}_e = 10^{-4} \cdot 9 \cdot \boldsymbol{E},$$

kai $\boldsymbol{\tau} = (1 \quad 1 \quad 1)^T$ m.

Taigi šiuo atveju išlygintųjų linijų ilgių $\tilde{S}_{ni}$ trilateracijos tinkle tikslumas esant pataisų lygčių koeficientų klaidų įtakai įvertinamas ribine standartinio nuokrypio reikšme $\sigma_{\tilde{S}_{ni(a)}} < 0{,}03\,\text{m}$.

Išlygintųjų linijų ilgių vektoriaus $\tilde{S}$ tikslumas, atsižvelgiant į linijų ilgių matavimo klaidas, įvertinamas kovariacijų matrica $\boldsymbol{K}_{\tilde{S}(l)}$, kuri lygi

$$\boldsymbol{K}_{\tilde{S}(l)} = \sigma_0^2 \boldsymbol{A} \boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{A}^T.$$

Panaudoję ankstesnio pavyzdžio pradinius duomenis turime

$$\boldsymbol{K}_{\tilde{S}(l)} \le 10^{-4} \cdot 0{,}25\boldsymbol{E} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ . & . & . \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ... & 1 \\ 1 & ... & 1 \\ 1 & ... & 1 \end{pmatrix} = 0{,}25 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ . & . & ... & . \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Išlygintojo linijos ilgio vidutinė standartinio nuokrypio dėl linijų ilgių matavimo klaidų reikšmė $\sigma_{\tilde{S}_{ni(a)}}$ apibrėžiama nelygybe $\sigma_{\tilde{S}_{ni(a)}} \le 0{,}008\,\text{m}$.

5. Išvados

1. Pasiūlytas daugkartine linijine sankirta nustatomų taškų erdvinių koordinačių skaičiavimo, taikant linearizuotų parametrinių lygčių sistemą, metodas. Parametrinių pataisų lygčių sistema sprendžiama mažiausiųjų kvadratų metodu.

2. Išlygintųjų erdvinių koordinačių tikslumui įvertinti išvestos jų kovariacijų formulės (5), (6), (8). Išlygintųjų koordinačių kovariacijų matricą sudaro dvi

komponentės. Viena kovariacijų komponentė įvertina išmatuotų linijų ilgių klaidų įtaką erdvinių koordinačių klaidoms, o antroji – parametrinių pataisų lygčių koeficientų klaidų įtaką išlygintųjų koordinačių klaidoms.

Literatūra

1. Koch, K.-R. Räumliche Helmert-Transformation variabler Koordinaten im Gauss-Helmert und im Gauss-Markoff Modell. *Z. f. Vermessungswessen*, No 3. Stuttgart: Verlag K. Witwer, 2002, S. 147–152.
2. Koch, K.-R. Einführung in die Bayes-Statistik. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. 225 S.
3. Markuze, J. I. Fundamentals of adjustments computations (Основы уравнительных вычислений). Moscow: Nedra, 1990. 240 p. (in Russian).
4. Skeivalas, J. Treatment of correlated geodetic measurements (Koreliuotų geodezinių matavimų rezultatų matematinis apdorojimas). Vilnius: Technika, 1995. 272 p. (in Lithuanian).
5. Fischer, B.; Hegland, M. Collocation, Filtering and Nonparametric Regression, Part 1. *Z. f. Vermessungswessen*, No 1. Stuttgart: Verlag K. Witwer, 1999, S. 17–24.
6. Chitau, D. Über Koordinatentransformation in dreidimensionalen Systemen mit linearen Modellen. *Z. f. Vermessungswessen*, No 5. Stuttgart: Verlag K. Witwer, 1996, S. 203–211.
7. Hirsch, J.; Wendt, K. Calibration of Grid Plates by Multi-Lateration (ISI) In: Proceedings of 8th International Symposium on Measurement and Quality Control in Production, Erlangen, Oct 12–15, 2004, p. 663–668.

Jonas SKEIVALAS. Prof, Doctor Habil.

Vilnius Gediminas Technical University. Dept of Geodesy and Cadastre, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania (Ph +370 5 274 4703, Fax +370 5 274 4705),
e-mail: jonas.skeivalas@ap.vtu.lt.

Author of two monographs and more than 130 scientific papers. Participated in many intern conferences and research visits to the Finish Geodetic Institute.

Research interests: processing of measurements with respect to tolerances, adjustment of geodetic networks.

Robertas DARGIS. Director, UAB „Eika“, A. Goštauto g. 40A, LT-01112 Vilnius, Lietuva.

Dipl. Eng. (1984). President of the Lithuanian association of real estate developers.

Research interests: engineering geodesy, adjustment of geodetic networks.