

PLOKŠTUMINIŲ IR ERDVINIŲ GEODEZINIŲ KOORDINAČIŲ TRANSFORMAVIMO ALGORITMŲ TIKSLUMO ANALIZĖ

Jonas Skeivalas¹, Robertas Dargis²

¹Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva,
el. paštas: Jonas.Skeivalas@ap.vtu.lt

²UAB „Eika“, A. Goštauto g. 40A, LT-01112 Vilnius, Lietuva,
el. paštas: robertas@eika.lt

Įteikta 2006 02 20, priimta 2006 06 07

Santrauka. Nagrinėjamas geodezinių koordinačių, transformuojamų iš vienos koordinačių sistemos į kitą, tikslumas. Transformavimo parametrų reikšmės apskaičiuojamos mažiausiųjų kvadratų metodu, atsižvelgiant į identiškų taškų abiejose koordinačių sistemose tikslumą. Transformuotų į naują sistemą koordinačių tikslumas analizuojamas įvertinant transformavimo lygčių koeficientų bei transformavimo parametrų klaidų įtaką. Transformuotų koordinačių kovariacijų matrica sudaroma iš dviejų komponentų. Viena komponentė įvertina transformavimo lygčių koeficientų klaidų įtaką, o antroji – transformavimo parametrų klaidų įtaką transformuotų koordinačių tikslumui. Pateikiamos formulės transformuotų koordinačių kovariacijų matricoms skaičiuoti.

Prasminiai žodžiai: transformavimo parametrai, kovariacijų matrica.

1. Įvadas

Geodezinės koordinatės iš vienos koordinačių sistemos į kitą transformuojamos geodezinių tinklų sudarymo, kartografavimo darbuose, geoinformacinių sistemų, skaitmeninių žemėlapių kūrimo, inžinerinės geodezijos, kadastro uždaviniuose ir kt. [1–6]. Transformavimo parametrų reikšmės apskaičiuojamos mažiausiųjų kvadratų metodu, taikant identiškus taškus, kurių koordinatės žinomos abiejose koordinačių sistemose. Straipsnyje nagrinėjamas transformuotų koordinačių tikslumas, įvertinant transformavimo parametrų klaidų įtaką. Kovariacijų matrica sudaroma iš dviejų komponentų. Viena iš jų rodo transformavimo lygčių koeficientų, o antroji – transformavimo parametrų įtaką transformuotų koordinačių kovariacijų matricai.

2. Transformavimo parametrų ir lygčių koeficientų klaidų įtaka transformuotų plokštuminių koordinačių tikslumui

Plokštuminėms koordinatėms transformuoti iš vienos koordinačių sistemos į kitą dažniausiai taikomas konforminis Helmerto metodas. Transformavimo parametrų reikšmėms nustatyti mažiausiųjų kvadratų metodu, naudojant identiškų taškų koordinates senojoje ir naujoje sistemose, sudaroma pataisų lygčių sistema:

$$\begin{aligned} V &= A\tau + L, \\ L &= -T', \end{aligned} \quad (1)$$

čia $V = (V_{x_1}, V_{y_1}, \dots, V_{x_n}, V_{y_n})^T$ – naujosios sistemos identiškų taškų koordinačių pataisų vektorius, $T = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)^T$ – koordinačių vektorius senojoje sistemoje, $T' = (x'_1, y'_1, \dots, x'_n, y'_n)^T$ – koordinačių vektorius naujojoje sistemoje, $\tau = (x_0, y_0, \varepsilon_x, \varepsilon_y)^T$ – transformavimo parametrų vektorius, (x_0, y_0) – senosios koordinačių sistemos pradžios taško koordinatės naujojoje sistemoje, n – identiškų taškų skaičius, $n > k/2$, $k = 4$ – transformavimo parametrų skaičius.

Pataisų lygčių koeficientų matrica A sudaryta iš blokų:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, \quad (2)$$

čia $A_i = (E | A'_i) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x_i & -y_i \\ 0 & 1 & y_i & x_i \end{array} \right)$, E – vienetinė matrica.

Transformavimo parametrų vektoriaus τ reikšmė nustatoma mažiausiųjų kvadratų metodu kaip normalinių lygčių sistemos sprendinys:

$$\tau = -N^{-1}\omega = -N^{-1}A^T Q_T^{-1} L, \quad (3)$$

čia $N = A^T Q_T^{-1} A$, $\omega = A^T Q_T^{-1} L$, Q_T – naujosios sistemos identiškų taškų koordinačių svorinė matrica.

Kai pavienių taškų koordinatės nustatytos nepriklausomai viena nuo kitos,

$$\mathbf{Q}_{T'} = (\mathbf{Q}_{T'_1}, \mathbf{Q}_{T'_2}, \dots, \mathbf{Q}_{T'_n})_{diag},$$

$$\mathbf{Q}_{T'_i} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{x'_i}^{-1} & \mathbf{Q}_{x'_i y'_i} \\ \mathbf{Q}_{y'_i x'_i} & \mathbf{p}_{y'_i}^{-1} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

čia $\mathbf{p}_{x'_i}$, $\mathbf{p}_{y'_i}$ – i -ojo taško koordinatinių naujojoje sistemoje svoriai, $\mathbf{Q}_{x'_i y'_i} = r_{x'_i y'_i} \mathbf{p}_{x'_i}^{-1/2} \mathbf{p}_{y'_i}^{-1/2}$, $r_{x'_i y'_i}$ – koreliacijos koeficientas.

Išlygintųjų koordinatinių vektorius $\tilde{\mathbf{T}}'$ naujojoje sistemoje yra lygus

$$\tilde{\mathbf{T}}' = \mathbf{T}' + \mathbf{V} = \mathbf{T}' + \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{T'}^{-1}\mathbf{T}' - \mathbf{T}' = \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{T'}^{-1}\mathbf{T}'. \quad (4)$$

Taikydami formulę (3), gauname apskaičiuotų transformavimo parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ kovariacijų matricos išraišką:

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\tau}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\tau}} = (\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{T'}^{-1})\mathbf{K}_L(\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{T'}^{-1}) = \sigma_0^2 \mathbf{N}^{-1}, \quad (5)$$

čia $\mathbf{K}_L = \mathbf{K}_{T'} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{T'}$, σ_0 – matavimo rezultato, kurio svoris lygus vienetui, standartinis nuokrypis.

Identiškų taškų išlygintųjų koordinatinių vektoriaus $\tilde{\mathbf{T}}'$ kovariacijų matricą $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{T}}'}$, taikydami formulę (4), rašome

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{T}}'} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{T}}'} = (\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{T'}^{-1})\mathbf{K}_{T'}(\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{T'}^{-1})^T = \sigma_0^2 \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T. \quad (6)$$

Vektorių $\tilde{\mathbf{T}}'$ ir $\boldsymbol{\tau}$ kovariacijų matrica $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{T}}'\boldsymbol{\tau}}$ yra lygi

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{T}}'\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{M} \left\{ (\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{T'}^{-1}\delta\mathbf{T}') (\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{T'}^{-1}\delta\mathbf{T}')^T \right\} = (\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{T'}^{-1})\mathbf{M}(\delta\mathbf{T}'\delta\mathbf{T}'^T)(\mathbf{Q}_{T'}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}) = \sigma_0^2 \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{T'}^{-1}\mathbf{Q}_{T'}\mathbf{Q}_{T'}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1} = \sigma_0^2 \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}, \quad (7)$$

čia \mathbf{M} – vidurkio (matematinės vilties) simbolis, $\delta\mathbf{T}' = \mathbf{T}' - \mathbf{M}\mathbf{T}'$.

Turėdami transformavimo parametrų vektorius $\boldsymbol{\tau}$, galime apskaičiuoti visų kitų naujosios sistemos taškų (neidentišku) transformuotų koordinatinių vektorių \mathbf{T}' . Pavienio i -ojo taško koordinatinių vektoriaus \mathbf{T}'_i išraiška yra:

$$\mathbf{T}'_i = \mathbf{A}_i \boldsymbol{\tau}, \quad (8)$$

čia \mathbf{A}_i – koordinatinių transformavimo lygčių koeficientų matrica pagal išraišką (2).

Vektoriaus \mathbf{T}'_i kovariacijų matrica $\mathbf{K}_{T'_i}$ sudaryta iš dviejų komponentių, iš kurių viena apibrėžia transformavimo parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ dedamųjų klaidų įtaką vektoriaus \mathbf{T}'_i tikslumui, o antroji – matricos \mathbf{A}_i narių klaidų įtaką vektoriaus \mathbf{T}'_i tikslumui:

$$\mathbf{K}_{T'_i} = \mathbf{K}_{T'_i(\boldsymbol{\tau})} + \mathbf{K}_{T'_i(a)}, \quad (9)$$

čia $\mathbf{K}_{T'_i(\boldsymbol{\tau})}$ – kovariacijų matricos komponentė esant vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ įtakai, $\mathbf{K}_{T'_i(a)}$ – kovariacijų matricos komponentė esant matricos \mathbf{A}_i narių įtakai.

Taikydami kovariacijų matricos $\mathbf{K}_{T'_i}$ komponentę $\mathbf{K}_{T'_i(\boldsymbol{\tau})}$, (5), gauname:

$$\mathbf{K}_{T'_i(\boldsymbol{\tau})} = \mathbf{A}_i \mathbf{K}_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{A}_i^T = \sigma_0^2 \mathbf{A}_i \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_i^T. \quad (10)$$

Nustatysime kovariacijų matricos komponentės $\mathbf{K}_{T'_i(a)}$ išraišką. Lygybę (8) transformuojame į kitoki pavidalą:

$$\mathbf{T}'_i = \mathbf{T}_0 + \mathbf{M}\mathbf{T}_i, \quad (11)$$

čia $\mathbf{T}_0 = (x_0, y_0)^T$. Matrica \mathbf{M} formuojama iš transformavimo parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ komponentių:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & -\varepsilon_y \\ \varepsilon_y & \varepsilon_x \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Taigi koeficientų matricos \mathbf{A}_i blokinės dalies \mathbf{A}'_i nariai tapo vektoriaus \mathbf{T}_i komponentėmis. Pagal lygybę (11) galima parašyti:

$$\mathbf{K}_{T'_i(a)} = \mathbf{M}\mathbf{K}_{T_i}\mathbf{M}^T, \quad (13)$$

čia \mathbf{K}_{T_i} – senos sistemos koordinatinių vektoriaus kovariacijų matrica.

Vektoriaus \mathbf{T}_0 , kaip transformavimo parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ komponentės, įtaka išreikšta formule (10).

3. Transformavimo parametrų ir lygčių koeficientų klaidų įtaka transformuotų erdviųjų koordinatinių tikslumui

Erdvinių koordinatinių transformavimo lygčių sistema yra netiesinė, todėl praktiniuose skaičiavimuose ji linearizuojama ir rašoma taip (esant i -ojo taško koordinatėms):

$$\mathbf{T}'_i = \mathbf{T}_i + \mathbf{A}_i \boldsymbol{\tau} \left. \vphantom{\mathbf{T}'_i} \right\} \quad (14)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

čia $T'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)^T$ – i -ojo taško koordinatinių vektorių naujoje sistemoje, $T_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ – i -ojo taško koordinatinių vektorių senojoje sistemoje, $\tau = (x_0, y_0, z_0, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, m)^T$ – transformavimo parametrų vektorius, m – linijinis mastelis, n – identiškų taškų skaičius, kai skaičiuojami transformavimo parametrai.

Matrica

$$A_i = (E | A'_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_i & y_i & x_i \\ 0 & 1 & 0 & z_i & 0 & -x_i & y_i \\ 0 & 0 & 1 & -y_i & x_i & 0 & z_i \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Transformavimo parametrų vektorius τ reikšmė gaunama mažiausių kvadratų metodu kaip normalinių lygčių sistemos sprendinys, taikant n identiškų taškų duomenis:

$$\tau = -N^{-1}\omega, \quad (16)$$

čia $N = A^T Q_T^{-1} A$, $\omega = A^T Q_T^{-1} L$, $L = (L_1^T \dots L_n^T)^T$ – laisvųjų narių vektorius, $L_i = T_i - T'_i$. Pataisų lygčių koeficientų matrica A sudaryta iš blokų

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Apskaičiuotų transformavimo parametrų vektorius τ kovariacijų matrica K_τ yra lygi [7]:

$$K_\tau = \sigma_0^2 (N^{-1} N_1 N^{-1} + N^{-1}), \quad (18)$$

čia $N_1 = A^T Q_T^{-1} Q_T Q_T^{-1} A$, Q_T – senosios sistemos identiškų taškų koordinatinių svorinė matrica.

Tuo atveju, kai naujosios ir senosios sistemų identiškų taškų koordinatės yra maždaug vienodo tikslumo, t. y. $Q_{T'} \approx Q_T$, tada $N_1 = N$, ir formulė (18) rašoma:

$$K_\tau = 2\sigma_0^2 N^{-1}. \quad (19)$$

Pavienio i -ojo taško erdvinį koordinatinių vektoriui T_i transformuoti į naująją koordinatinių sistemą taikysime transformavimo formulę, kuri iš pavidalo (14) pertvarkyta taip:

$$T'_i = T_0 + (E + M)T_i, \quad (20)$$

čia $T_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ – viena transformavimo parametrų

vektoriaus τ dedamoji. Matrica M sudaroma iš transformavimo parametrų vektoriaus τ antrosios dedamosios ir užrašoma taip:

$$M = \begin{pmatrix} m & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & m & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & m \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Transformuojant erdvinės koordinatės naujojo vektoriaus T'_i kovariacijų matrica $K_{T'_i}$ sudaryta iš dviejų komponentų – $K_{T'_i(\tau)}$ ir $K_{T'_i(a)}$:

$$K_{T'_i} = K_{T'_i(\tau)} + K_{T'_i(a)}. \quad (22)$$

Kovariacijų matricos komponentė $K_{T'_i(\tau)}$ rodo transformavimo parametrų vektoriaus τ įtaką vektoriaus T'_i tikslumui. Antroji komponentė $K_{T'_i(a)}$ apibūdina matricos A_i narių įtaką vektoriaus T'_i tikslumui.

Kovariacijų matricos komponentė $K_{T'_i(\tau)}$, taikant formulę (14), rašoma:

$$K_{T'_i(\tau)} = K_{T_i} + A_i K_\tau A_i^T = K_{T_i} + 2\sigma_0^2 A_i N^{-1} A_i^T, \quad (23)$$

kai identiškiesiems taškams galioja apytikrė lygybė $Q_{T'} \approx Q_T$, K_{T_i} – senosios sistemos koordinatinių vektorių kovariacijų matrica.

Kovariacijų matricos komponentė $K_{T'_i(a)}$, taikant formulę (20), igauna išraišką

$$K_{T'_i(a)} = (E + M)K_{T_i}(E + M)^T. \quad (24)$$

Pateiksime pavyzdį transformuotų plokštuminių koordinatinių tikslumui dėl transformavimo parametrų bei transformavimo lygčių koeficientų klaidų įtakos įvertinti. Transformavimo parametrų vektoriaus τ reikšmė nustatyta pagal 7 identiškus taškus ir lygi:

$$\tau = \begin{pmatrix} 6039264,438 \\ 553665,202 \\ 0,99979550316 \\ 1,83813 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

Vektoriaus τ kovariacijų matricos K_τ įvertis K'_τ yra lygus

$$K'_\tau = m_0^2 N^{-1} = 1,7 \cdot 10^{-6} (0,143; 0,143; 0,368 \cdot 10^{-9}; 0,368 \cdot 10^{-9})_{diag},$$

čia $\sigma_0 \approx m_0$, atvirkštinės matricos N^{-1} nediagonalieji nariai yra artimi nuliui.

Taško Nr.	Standartinių nuokrypių įverčiai, m					
	$m_{x'}(\tau)$	$m_{y'}(\tau)$	$m_{x'}(a)$	$m_{y'}(a)$	$m_{x'} = \sqrt{m_{x'}^2(\tau) + m_{x'}^2(a)}$	$m_{y'} = \sqrt{m_{y'}^2(\tau) + m_{y'}^2(a)}$
1	0,001	0,001	0,002	0,001	0,0022	0,0014
2	0,001	0,001	0,002	0,001	0,0022	0,0014

Transformuojamų 2 taškų koordinatinių transformavimo lygčių koeficientų matrica yra lygi:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 30993,640 & -21255,800 \\ 0 & 1 & 21255,800 & 30993,640 \\ 1 & 0 & 30869,460 & -21061,820 \\ 0 & 1 & 21061,820 & 30869,460 \end{pmatrix}.$$

Kovariacijų matricos komponentės $K_{T'(\tau)}$ įvertį $K'_{T'(\tau)}$ esant transformavimo parametru klaidų įtakai gauname pagal formulę (10), kai $\sigma_0 \approx m_0$:

$$K'_{T'(\tau)} = AK'_\tau A^T = 1,7 \cdot 10^{-6} (0,658; 0,658; 0,657; 0,657)_{diag},$$

nediagonalieji nariai paprastai yra lygūs nuliui.

Kovariacijų matricos komponentės $K_{T'(a)}$ įvertis $K'_{T'(a)}$ esant transformavimo lygčių koeficientų klaidų įtakai nustatomas pagal formulę (13):

$$K'_{T'(a)} = MK_T M^T = 10^{-6} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Šioje formulėje

$$M = \begin{pmatrix} 0,99 & -1,8 \cdot 10^{-6} \\ 1,8 \cdot 10^{-6} & 0,99 \end{pmatrix},$$

$$K_T = 10^{-6} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & & 0 \\ 4 & 1 & & \\ \hline & & 4 & 4 \\ 0 & & 4 & 1 \end{array} \right).$$

Į naują sistemą transformuotų taškų koordinatinių standartinių nuokrypių įverčiai $m_{x'}$, $m_{y'}$ pateikti lentelėje.

4. Išvados

1. Gautos formulės į naują sistemą transformuotų plokštuminių ir erdvinį koordinatinių tikslumui įvertinti kovariacijų matricos pavidalu, kai atsižvelgiama ne tik į transformavimo parametru klaidų, bet ir transformavimo lygčių koeficientų klaidų įtaką.

2. Išvestosios formulės rodo, kad transformuotosios į naują sistemą plokštuminės ir erdvinės koordinatės yra mažiau tikslios už senosios sistemos koordinatės.

Transformuotųjų koordinatinių tikslumas labiausiai priklauso nuo transformavimo parametru nustatymo tikslumo, o jis nuo identiškų taškų skaičiaus bei šių taškų koordinatinių abiejose sistemose tikslumo. Skaičiavimų rezultatai rodo, kad transformavimo lygčių koeficientų klaidų įtaka transformuotų koordinatinių tikslumui yra maždaug tos pačios eilės kaip ir transformavimo parametru klaidų įtaka.

Literatūra

1. Koch, K.-R. Räumliche Helmert-Transformation variabler Koordinaten im Gauss-Helmert und im Gauss-Markoff Modell. *Z. f. Vermessungswesen*, No 3. Stuttgart: Verlag K. Witwer, 2002, S. 147–152.
2. Koch, K.-R. Einführung in die Bayes-Statistik. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. 225 S.
3. Fischer, B.; Hegland, M. Collocation, filtering and nonparametric regression, Part 1. *Z. f. Vermessungswesen*, No 1. Stuttgart: Verlag K. Witwer, 1999, S. 17–24.
4. Chitau, D. Über Koordinatentransformation in dreidimensionalen Systemen mit linearen Modellen. *Z. f. Vermessungswesen*, No 5, Stuttgart: Verlag K. Witwer, 1996, S. 203–211.
5. Skeivalas, J.; Putrimas, R. Accuracy analysis of planimetric coordinate transformation. *Geodesy and Cartography (Geodezija ir kartografija)*, No 1 (23). Vilnius: Technika, 1996, p. 92–95 (in Lithuanian).
6. Markuze, J. J.; Bojko, E. G.; Golubev, V. V. Geodesy. Computation and adjustment of geodetic networks. Moscow: Kartgeocentr-Geodezizdat, 1994. 432 p. (in Russian).
7. Skeivalas, J. Accuracy of 3D geodetic coordinates transformation algorithmus. *Geodesy and Cartography (Geodezija ir kartografija)*, Vol XXXI, No 2. Vilnius: Technika, 2005, p. 54–56 (in Lithuanian).

Jonas SKEIVALAS. Prof, Doctor Habil.

Vilnius Gediminas Technical University. Dept of Geodesy and Cadastre, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania (Ph +370 5 274 4703, Fax +370 5 274 4705), e-mail: jonas.skeivalas@ap.vtu.lt.

Author of two monographs and more than 130 scientific papers. Participated in many intern conferences and research visits to the Finish Geodetic Institute.

Research interests: processing of measurements with respect to tolerances, adjustment of geodetic networks.

Robertas DARGIS. Engineer. UAB „Eika“, A. Goštauto g. 40A, LT-01112 Vilnius, Lietuva.

Research interests: engineering geodesy, adjustment of geodetic networks.